論理法則と証明

久島広幸

2023 年 1 月 8 日

これからなにをはじめるのか

論理学においては，どうやら対象とする「言語」をきちんと定めることが必要らしい．そしてその「言語」の世界に「意味」を与え，その「意味」のもとで「言語」世界での演繹や推論，証明という行為をあきらかにするようである．そこで今一度，論理学のおさらいをして，演繹，推論，証明という行為はなになのかを学び直すことが，本稿の目的である．

おさらいの順番は

- 命題論理
- 変項がひとつのときの一階述語論理
- 変項が多数ある場合の一階述語論理

である．いろいろな立場があるだろうけれど，述語論理は命題論理を土台にするという立場をとる[*1]．

命題論理と一階述語論理は，古典命題論理，古典述語論理などと呼ばれることもある．論理学には，直観論理，様相論理，などというものがあって，そこにも直観主義命題論理とか様相述語論理なるものがあるらしいからである．その区別を強調したい場合には「古典」という形容詞をつける習慣のようだ．

体系としては

構文論（シンタックス．syntax）
意味論（セマンティックス，semantics）
推論（deduction ?）

という構造を基本にしていきたい．

構文論では，意味には立ち入らない．ここから生まれるものは，公理や推論規則である．言ってみれば，論理体系の公理化，形式化である．これらは論理法則とよばれる．

意味論は，論理体系の解釈を用意するものである．解釈のための道具として，集合やら，代数やらが使われる．それらを理論法則とよぶ．

構文論で定義される論理式に意味を与えるときには，集合論の助けを借りなければならない（本当か？どういうことだ？なにからの引用だ？）

学習の指針としたものは，戸田山和久著『論理学をつくる』 [3] である．この本からたくさんのことを学んだ．折に触れて，手元にある『LOGIC A Foundation for Computer Science』 [2] や『Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving』 [1] も参考にした．

本稿を書こうと思い立ったのは，本橋信義著『新しい論理序説』 [4] を読んだからである．

*1 立場を逆転して，0 項の一階述語論理を命題論理とする立場もあるようだ．

目次

第 I 部

帰納，メタ言語

第 1 章

帰納的定義と帰納法，対象言語とメタ言語

1.1 帰納的定義

漸化式によって定義された数列，例えば

$$a_1 = 7$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

は，a_1 から始まって

$$a_1 = 7$$
$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13$$
$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \times 13 - 1 = 25$$
$$\cdots\cdots$$

というように，順次数珠繋ぎのようにして，数列の第 n 項がもとまっていく[*1]．この定義の良いところは，一般項が簡単に書き下せなくても，数列が定義できるところにある[*2]．さらに，$a_{n+1} = 2a_n - 1$ の形をしていないものはこの数列の項にはならない，という制限も課せられている．

この構造を

- 素となるものを決める．（$a_1 = 7$）
- 生成の規則を決める（$a_{n+1} = 2a_n - 1$）
- 規則を満たさないものは仲間ではない

という雛形形式としてまとめておこう．そしてこの雛形形式にのっとった定義方法を「帰納的定義」と呼ぶことにする．たとえば，次の様な形で応用する：

(1) $a, b, c, \ldots$ は，Foo である
(2) A, B が Foo であるならば，$(A \circ B)$ と $(A \bullet B)$ も Foo である．
(3) 以上の様にして得られるものが Foo である

この定義では，まず，素である $a, b, c, \ldots$ が Foo であることが決められている．次に，この $a, b, c, \ldots$ を生成規則に当てはめれば，$(a \circ b)$ や $(c \bullet b)$ が Foo であることになる．そして $A = (a \circ b)$，$B = (c \bullet b)$ とおけ

[*1] もちろん，一般項表現 $a_n = 3 \cdot 2^n + 1$ を使ってこの数列を定義する方法もある．他にも，例えばフィボナッチ数列 $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

ともとめられるけれど（わたくしはどうやってもとめるのかわからない），さすがにこうなると漸化式表現の方が見通しが良い．

ただ，コンピュータに計算をさせるとなると話は別で，一般項がもとまるのならばそれを使う方が計算は速い．漸化式表現をそのままプログラミングすると，必然的に再帰呼び出し構造を使うことになるので，計算のオーバーヘッドが大きく，遅くなってしまう．

[*2] 漸化式から一般項をもとめる，という演習を高校時代はよくやった（やらされた）．一般項表現を得るのはそう簡単ではなく，なかなか骨が折れるものであった．

ば，$(A \circ B)$ や $(A \bullet B)$ も Foo であることになる．文字が足りなくなるので，A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を使うことにすれば，Foo であるものが

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (a \circ b) \\
A_2 &= (a \circ A_1) = (a \circ (a \circ b)) \\
B_1 &= (c \bullet b) \\
B_2 &= (a \bullet B_1) = (a \bullet (c \bullet b)) \\
C_1 &= (A_1 \bullet A_2) = ((a \circ b) \bullet (a \circ (a \circ b))) \qquad \cdots
\end{aligned}
$$

というように生成されてくる．「素（a, b）」から「複雑なもの（A_i, B_i, C_i）」が順次生成されていくのである．この生成の過程を逆に辿れば，A_i, B_i などは，最終的には，素であるものであらわされることもあきらかである．のちに見る様に，命題論理式，一階述語論理の論理式は，この様な形で帰納的に定義されるものとなっている[*3].

1.2 構造に関する帰納法

帰納的に定義されたものについては，独特の証明方法を用いることができる．

1.2.1 数学的帰納法

先の漸化式で定義された数列（すなわち帰納的に定義された数列）

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 7 \\
a_{n+1} &= 2a_n - 1
\end{aligned}
$$

において，「この数列の項はすべて 3 でわると 1 あまる」という事柄を証明することを考えてみる．

一般項表現は $a_n = 3 \cdot 2^n + 1$ であったから，「3 でわると 1 あまる」ことはあきらかだ．こういうときは一般項表現が有用だが，つねに簡単な一般項表現が得られるとは限らない．そこで，帰納法の出番なのである．帰納法では次の様に証明される：

証明.

(1) $a_1 = 7$ であるから，a_1 は 3 でわると 1 あまる．

(2) a_n は 3 でわると 1 あまる項であると仮定する．つまり $a_n = 3k + 1$ とあらわせると仮定する（k は自然数）．

(3) すると，$a_{n+1} = 2a_n - 1 = 2(3k + 1) - 1 = 6k + 1$ であるから a_{n+1} も，3 でわると 1 あまる．

(4) 以上から，どの a_n も，3 でわると 1 あまる．

□

n 番目で成り立つのだから $n + 1$ 番目でも成り立つという筋書きである．そしてその事実が示されれば，

- $n - 1$ 番目で成り立てば n 番目でも成り立つ
- $n - 2$ 番目で成り立てば $n - 1$ 番目でも成り立つ
- $n - 3$ 番目で成り立てば $n - 2$ 番目でも成り立つ
- $\cdots\cdots$
- 2 番目で成り立てば 3 番目でも成り立つ
- 1 番目で成り立てば 2 番目でも成り立つ

[*3] 帰納的定義は，プログラミングの世界では，BNF でお馴染みである．個人的には，帰納的定義というよりは構成的定義という方がしっくりする気がするのだが．

であり，1 番目で成り立つことは確認済みであるから，順次ドミノ倒し的にすべてが成立することになる．このような証明方法を数学的帰納法という[*4]

もうひとつ，数学的帰納法による証明の具体例を見てみよう．数列が

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1,\ b_1 = 1\\
&a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n},\ b_n = b_{n-1} + \frac{2}{n(n+1)} \quad (n = 2, 3, \ldots)
\end{aligned}
$$

と漸化式で定義されているとする．このとき

$$a_n,\ b_n \text{ に対して } a_n \geq b_n \text{ である}$$

は成り立つだろうか？[*5]

証明.

(1) $a_1 = 1,\ b_1 = 1$ であるから $a_1 \geq b_1$ である．

(2) $a_n \geq b_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ であると仮定する．

(3) a_{n+1} と b_{n+1} については

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - b_{n+1} &= \left(a_n + \frac{1}{n+1}\right) - \left(b_n + \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= (a_n - b_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= (a_n - b_n) + \frac{n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

となる．(2) の仮定から $a_n - b_n \geq 0$ である．そしてまた $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)} > 0$ はあきらかだから，$a_{n+1} - b_{n+1} \geq 0$ である．

(4) 以上から，どんな n でも $a_n \geq b_n$ である（そして，上の結果からあきらかなように，$n \neq 1$ ならば $a_n > b_n$ が成り立っているのである）．

□

1.2.2 構造的帰納法

数学的帰納法で用いた考え方を応用させるものが，構造的帰納法と呼ばれるものである．さきに例に挙げた Foo の構成の定義

- $a, b, c, \ldots$ は，Foo である
- A, B が Foo であるならば，$(A \circ B)$ と $(A \bullet B)$ も Foo である．
- 以上の様にして得られるものが Foo である

において，Foo のメンバであれば，左括弧「(」と右括弧「)」の数は等しい，ということが次の手順で証明できる[*6]

証明.

(1) a, b は括弧をもたないから，左括弧と右括弧のかずはともに 0 で等しい．

(2) A と B それぞれについて，左括弧の数と右括弧の数は等しいと仮定する．話をわかりやすくするために

$$
\begin{aligned}
L_A = A \text{ の左括弧の数},\ R_A = A \text{ の右括弧の数}\\
L_B = B \text{ の左括弧の数},\ R_B = B \text{ の右括弧の数}
\end{aligned}
$$

[*4] この例の様に，自然数は順序よく並ぶ，という性質を利用するケースが多い．

[*5] これは，$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{2n}{n+1}$ から漸化式を無理矢理作製して問いの形にしたものである．

[*6] 戸田山の本 [3] でこれを学んだ．

とあらわせば

$$L_A = R_A,\ L_B = R_B$$

ということを仮定したのである．

(3) このとき, $(A \circ B)$ の左括弧の数は $L_A + L_B + 1$ である．また, $(A \circ B)$ の右括弧の数は $R_A + R_B + 1$ である．そして仮定から $L_A = R_A$, $L_B = R_B$ であったから

$$(A \circ B) \text{ の左括弧の数} = L_A + L_B + 1 = R_A + R_B + 1 = (A \circ B) \text{ の右括弧の数}$$

となる．

(4) $(A \bullet B)$ についても同様である．

(5) 以上より，すべての Foo のメンバについて，左括弧と右括弧の数は等しい．

□

この方法の要点は

- 出発点となる「素」が，ある性質 P を持っている（満たしている）
- 帰納的に定義された生成規則は，その性質 P を保存する

ということを述べるところにある．そのために，あるところまでで性質 P が保存されていると仮定して，そこに生成規則を適用してあらたなものを作り出しても P が成り立っている，という論法とるのである．

この先，この構造的帰納法に世話になることがおおい．

1.3 対象言語とメタ言語

およそ説明というものは，日常言語を使って行われる行為である．一方で，論理学の体系は，その論理学固有の言語世界を作り上げ，その言語世界が持つ性質を考察していくことになる．したがって，その論理学固有の言語世界と，それを説明するための言語は異なるものである，ということを念頭に置いておかねばならない．言い換えれば，論理学固有の言語世界を，ひとつ上の高みとなる外部から眺めて，考察をめぐらせていくのである．このような関係にある言語どうしを，対象言語とメタ言語と名付ける[*7]．対象言語についてなにがしかを語る外側の言語という意味で，メタ言語と呼ぶのである．日常言語での説明も，もちろん，メタ言語なのである．

1.3.1 メタ言語の簡略化記号

本稿では，説明の簡略化と明晰化をはかるために，日常言語だけではなく，メタ言語としての記号をつかう．代表的なものは

$=$

この記号の左右にかかれている数式（のようなもの）は相等しいということをあらわす．$\neq$ とあれば，相等しくないということである．

$:=$, $=:$

数式（のようなもの）を置き換えるばあいに利用する $A := B$ であれば，B を A に置き換える．$A =: B$ であれば，A を B に置き換える，ということを意味している．$=$ との使い分けは，かなり恣意的かつ曖昧である．

$\Leftrightarrow$, $\Longleftrightarrow$

この記号の左右にかかれていることがらの意味は同じである，ということをあらわす．主に文に用いられ

[*7] このように区別することによって，パラドックス（有名なところでは,「クレタ人は嘘つきである，とクレタ人が言った」とか「この文は嘘である」とか）の温床である自己言及を避けることができる．なぜならば，対象言語における真理というものの定義を，対象言語の中に持ち込まないとするからである．言い換えれば，対象言語の真理は，対象言語を表現できて，かつ，それについての真理を語ることができる外部すなわちメタ言語を用いて実践するのだという決意だ．それゆえ，自己言及が生じえないのである．タルスキによるアイデアであるらしい．

るが，数式（のようなもの）の場合にも使う．たとえば，「事柄 A」$\Leftrightarrow$「事柄 B」とあれば，A と B は同じことを述べているとする．

$\Rightarrow$, $\Longrightarrow$
: この記号の左側が成り立つとき，右側も成り立つ[*8] ことをあらわす．すなわち，「事柄 A」$\Rightarrow$「事柄 B」とあれば，「A が成り立つとき，B も成り立つ」ということである．文脈によっては，「A が成り立つならば，B も成り立つ」と書かれることもある．この記号も，主に文に用いられるが，数式（のようなもの）の場合にも使う．

その他にも， $\equiv$, $\models$, $\vdash$ というようなメタ言語の記号がこれから登場してくる．その意味・内容はおいおいあきらかになる．

1.3.2 集合

集合論をメタ言語として利用して，説明に肉付けをすることが多い．なので，ここで，集合の書き方をさらっておく．

$$\mathbb{M} = \{ M_1, M_2, \ldots, M_n \}$$

のように書いて，$\mathbb{M}$ という集合は，その要素として M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を持つということを示す．空集合は，この書き方の例外で，$\varnothing$ とあらわす．

M_i が $\mathbb{M}$ の要素であることを示したい場合には，$M_i \in \mathbb{M}$ と書く．N_i が $\mathbb{M}$ の要素でないことを示す時には，$N_i \notin \mathbb{M}$ と書く．

二つの集合 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ についての記号とその意味合いは次の通り：

$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$
: $\mathbb{A}$ は $\mathbb{B}$ の部分集合であり，$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ ではない（真部分集合という単語がある）．$\mathbb{A} \subsetneq \mathbb{B}$ という念の入った書き方もある．

$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$
: $\mathbb{A}$ は $\mathbb{B}$ の部分集合である，$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ であってもよい（通常，部分集合といったらこちらのことになる）

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
: $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ との合併集合．和集合という言い方もする．

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$
: $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ との共通部分をあらわす集合．積集合，交叉集合という言い方もする．

$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$
: $\mathbb{A}$ から $\mathbb{B}$ の要素であるものを除いた集合．差集合とも言われる．

$\overline{\mathbb{A}}$, $\mathbb{A}^c$
: $\mathbb{A}$ の補集合．

気の利いた書き方として次のものがある：

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{A}_k = \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_n$$
$$\bigcap_{k=1}^{n} \mathbb{A}_k = \mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 \cap \cdots \cap \mathbb{A}_n$$

1.3.3 関数

集合と同じように，関数もメタ言語での説明の際によく用いられる．とくに本稿では，関数の具体的な形を求めるというよりは，関数の個数に着目することが多い．その考え方を簡単にまとめる．

[*8] ところで，「成り立つ」ということはどういうことなのだろうか？正しい？真？非の打ち所がない？

集合 $\mathbb{N}$（要素の個数を N 個とする），集合 $\mathbb{M}$（要素の個数は M）において，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{M}$ への関数は，

- $\mathbb{N}$ の要素ひとつにたいして，ひとつだけ $\mathbb{M}$ の要素が定まる
- $\mathbb{N}$ の要素全てに対して，上のことが成り立たねばならない
- ただし，ことなる $\mathbb{N}$ の要素 n, n' が $\mathbb{M}$ の要素 m と対応しても構わない

として定義される[*9]．このとき，$\mathbb{N}$ を定義域，という．そして対応する $\mathbb{M}$ の要素を集めたものを値域という．値域が $\mathbb{M}$ 全体を覆わない場合も認めていることに注意[*10]．

関数に記号 f をあてて，上のように定義された関数を

$$f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{M} \quad \text{または} \quad \mathbb{N} \xmapsto{f} \mathbb{M}$$

要素に焦点をあてれば（$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{M}$）

$$f : n \longmapsto m \quad \text{または} \quad f : n \longmapsto f(n) \quad \text{または} \quad n \xmapsto{f} m \quad \text{または} \quad n \xmapsto{f} f(n)$$

などと書く．$f(n) \in \mathbb{M}$ であること（$f(n) \notin \mathbb{N}$ であること）に要注意．このとき，この関数 f はいくつあるか？数え上げの考え方は

> $n \in \mathbb{N}$ は，$\mathbb{M}$ のどれかに対応するのだから，その選択肢は M 個存在する．
> そのような要素が，$n_1, n_2, \ldots, n_N$ の N 個あるから，$M \times M \times \cdots \times M = M^N$ 個

となる[*11]．

今述べた関数の定義 $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{M}$ において，定義域 $\mathbb{N}$ の要素が複数の集合から決まるものを多変数関数という．．まず最初に 2 変数関数である．集合 $\mathbb{J}$ から要素をひとつ取り（$j \in \mathbb{J}$），そのうえで集合 $\mathbb{K}$ からひとつ要素を取る（$k \in \mathbb{K}$）という行為を想定し，そこから決まるペア (j, k) を考える[*12]．このペアは，順序対とよばれる．この順序対を要素とする集合を $\mathbb{J} \times \mathbb{K}$ と書く．順序に対する考慮が必要で，一般には $\mathbb{J} \times \mathbb{K} \neq \mathbb{K} \times \mathbb{J}$ である．$\mathbb{J}$ と $\mathbb{K}$ の要素の個数が違う場合を考えれば，この一般的な事実は納得しやすい．もちろん同じ集合どうしならば等しい．この順序対に対しても，先の定義をもちいて関数を考えることができ，それを

$$f : \mathbb{J} \times \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{M}$$

と書く．定義域の要素に着目すれば

$$f : (j, k) \longmapsto m \quad \text{または} \quad f : (j, k) \longmapsto f(j, k)$$

[*9] 異なる n, n' が同一の m と対応することはないものを，写像の言葉で「単射（injection）」という．関数は単射でなくてもいいのである（身近な例では $f(x) = x^2$ がある）．また，これからわかるように，集合間での対応であればいいので，特段「数」に対応しなくてもいいのだ．初等的には，関数は「数」から「数」への対応であるものから始まるけれども，関数は「数」だけのためにあるのではない．

[*10] 値域が $\mathbb{M}$ 全体を覆うときの写像の言葉は「全射（surjection）」である．そして「単射」で「全射」であるものを「全単射，双射，一対一対応（bijection）」という．全単射には逆写像が存在することは覚えておいていい．

[*11] おもしろいことに，ある集合の部分集合の個数も同様の考え方で求めることができる．考え方は「$n \in \mathbb{N}$ は，ある部分集合に入るか入らないかの 2 択となる」ということになる．したがって，「入る」を ○，「入らない」を × であらわすと，$f : \mathbb{N} \mapsto \{\circ, \times\}$ とする関数の個数を求めることと同じと考えられるのである．$\mathbb{N}$ の要素が，$n_1, n_2, \ldots, n_N$ の N 個の場合では，部分集合は 2^N 個となる．具体例でいけば，$\{a, b, c\}$ の部分集合の個数は，$2^3 = 8$ 個である．表で書いてみるとわかりやすいかもしれない：

a	b	c	部分集合
×	×	×	$\varnothing$
×	×	○	$\{c\}$
×	○	×	$\{b\}$
×	○	○	$\{b, c\}$
○	×	×	$\{a\}$
○	×	○	$\{a, c\}$
○	○	×	$\{a, b\}$
○	○	○	$\{a, b, c\}$

ちなみに，$\mathbb{N}$ のべき集合（power set）$P(\mathbb{N})$ は，全ての部分集合を要素とする集合と定義されるのだから，$P(\mathbb{N})$ の要素の個数が部分集合の個数 2^N であることは当然である．

[*12] ペアの総数は，$\mathbb{J}$ の要素数を J，$\mathbb{K}$ の要素数を K とすれば，$J \cdot K$ 個である．

同一の集合からなる場合には

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{M} \quad \text{または} \quad f : \mathbb{N}^2 \longmapsto \mathbb{M}$$
$$f : (n, n') \longmapsto m \quad \text{または} \quad f : (n, n') \longmapsto f(n, n')$$

などと書く．このようにして定められる関数を，定義域が２つの集合から構成されていることから，２変数関数，と呼ぶ慣わしである．

さてここで，この２変数関数の個数を数えてみる．$f : \mathbb{J} \times \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{M}$ の定義域の集合 $\mathbb{J} \times \mathbb{K}$ の要素の個数は $J \cdot K$ であるから，関数 f の個数は $M^{J \cdot K}$ 個．$f : \mathbb{N}^2 \longmapsto \mathbb{M}$ のときは定義域の集合 $\mathbb{N}^2$ の要素の個数は N^2 だから f の個数は $M^{(N^2)}$ である[*13]．

３変数以上の関数も同様の考え方で取り扱っていけば良い．

1.3.4 背理法

対象言語の定理などを証明する際に，メタ言語上での背理法を使うことがあるので，その骨格をまとめておく．

(1) C である

この事柄を証明するために

C ではない

と仮定する（仮定してみる）．そして，事実や知識，他の理論的考察などを動員して

C ではなかったら矛盾してしまう

ということを導き出し，結果「C である」ということを証明するという筋書きである．矛盾することの導出としてよく利用される方法のひとつに

- 「C ではない」とすると，そもそもの C の定義，性質などに反してしまうことを挙げる

というものがある．「$\sqrt{2}$ は無理数である」がその代表的な例である．「$\sqrt{2}$ を有理数であるとすると，$\sqrt{2}$ は有理数としてあらわせない」という矛盾を導くのである．また別の方法として

- C ではないとき，D が成り立つ
- C ではないとき，「D ではない」も成り立つ

がある．D も D の否定も成り立ってしまうのでこれは矛盾，という筋書きである．そうおいそれとこのような D は見つからないかもしれないが，見出せたら矛盾していることが言えるのである．

(2) H であるとき C である

この事柄を証明するために

「H であるとき，C ではない」と仮定する．

その際に，事実や知識，他の理論的考察などを動員して

C ではなかったら矛盾してしまう

ということを導き出して，「H であるときは C である」ということを証明する．

(3) H であるとき C である

この事柄を証明するために

「H でないとき，C である」

と仮定しても，往々にしてうまくいかない．前提の条件である H を否定してしまうと元も子もないからである．

(4) H でありかつ I であるとき，C である

この事柄を証明するために

「C ではない」と仮定する．

そして

- 「C ではない」状況と H を組み合わせると，I が成り立たない

[*13] 省略して M^{N^2} と書くこともある．$M^{(N^2)}$ と $(M^N)^2$ は大きく違うことに注意．

- 「C ではない」状況と I を組み合わせると，H が成り立たない

のどちらかを導き出して，「C である」ということを証明する[*14].

真か偽のどちらかしかないということが前提されているから，背理法という論法が成立するのである．真と偽の中間の様なものがあったら，この論法はなりたたない，

[*14]．良い例があるといいのだけれど，今のところこれだという物がみつからない．

第 II 部

命題論理

第 2 章

構文論

2.1　命題の論理式の定義

はじめに用語を定義しなければならない．

- 原子命題（最小命題という呼称もある）とは，それ以上分解しない（できない）命題のことをいう
- $\mathcal{T}$ と $\mathcal{F}$ を命題定数という（まだ $\mathcal{T}$ と $\mathcal{F}$ には意味は与えられていないことに留意）

それ以上分解しない（できない），ということをうまく説明するのはなかなかむつかしいが，原子という単語で想像をたくましくする[*1]．

命題論理の世界の「言語」すなわち対象言語を $\mathbb{L}$ と名付け，次の記号（語彙といっても良い）で構成されるものとする：

原子命題：$p, q, r, \ldots,\ p_1, p_2, \ldots$　（小文字を使う）
命題定数：$\mathcal{T}, \mathcal{F}$
論理結合子（論理演算子とも言われる）：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
補助記号：(,)

命題論理での論理式（略して命題論理式，もっと略して命題，と呼ばれることもある）を次の様に帰納的に定義する[*2]．これを「$\mathbb{L}$ の文法」ということもある：

(1) 原子命題は論理式である．
(2) $\mathcal{P}$ が論理式であるならならば $(\neg\mathcal{P})$ も論理式である．
(3) $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ がともに論理式であるならならば $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}), (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}), (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}), (\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q})$ も論理式である．
(4) 以上の様にして得られるもののみが論理式である．

さて，ここに出てきた $\mathcal{P}$ や $\mathcal{Q}$ はなんであるか？これは，$\mathbb{L}$ の語彙には含まれていない記号であるが，数多ある論理式を一括して代表した記号であるとするのである．その結果，どのような論理式も $\mathcal{P}$ や $\mathcal{Q}$ であらわすことができることになる．この性質は，いわゆる「変数」というものとそっくりであるので，$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を「(メタ論理的）命題変数」ということもある．なぜメタ論理的なのか？それは，$\mathbb{L}$ についてメタ言語的にまとめて話をするための記号であるからだ．$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ は $\mathbb{L}$ の語彙ではないのである．もちろん，$\mathcal{P}$ や $\mathcal{Q}$ を具体的に書き下しどんどん遡っていけば，結局は原子命題と論理結合子のみであらわすことが可能である．

[*1] 「分解しない（できない)」というように，行為の制限（しない）と原理的不可能性もどき（できない）を並列しているのは，我ながら少しずるいと思う．けれども，日常言語を用いてあらわされる命題には，考える角度によって原子命題ともいえるし，そうでないともいえるようなものが存在する．例えば，「彼の身長は 180cm 以上である」という命題が「彼の身長は 180cm 未満ではない」というような物言いができるからである．後者を原子命題とは言いたくはない（本当は，のちに述べる論理結合子を含まない命題，と言い切りたいところだけれどまだ論理結合子は登場していないし)．

[*2] 再起的定義と呼ばれることもある．個人的には，構成的定義といった方がしっくりする気がする．プログラミングの世界では，BNF でお馴染みである．

ここまででは，論理結合子に対してその意味は与えられていないことに再度留意である．しかしながら，発音は与えられている：

$$
\begin{array}{ll}
\neg\mathcal{P} & \{\mathcal{P}\text{ でない }\} \\
\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q} & \{\mathcal{P}\text{ かつ }\mathcal{Q}\} \\
\mathcal{P}\vee\mathcal{Q} & \{\mathcal{P}\text{ または }\mathcal{Q}\} \\
\mathcal{P}\to\mathcal{Q} & \{\mathcal{P}\text{ ならば }\mathcal{Q}\} \\
\mathcal{P}\leftrightarrow\mathcal{Q} & \{\text{ 良い発音がない}^{*3}\}\ .
\end{array}
$$

これらの発音には，命題論理の意味論を考えていくときにそれなりに納得しやすい日常語があてがわれている．けれども，日常語での意味とは食い違う部分が含まれているのも事実である．その食い違いがどこにあるのかを見るには，意味論の導入をまたねばならない．

2.2 括弧の省略

複雑な論理式になると，論理結合子の記号と括弧が乱立する．そこで，論理式のユニーク性（論理式は唯ひと通りにしか読めないこと）[*4] を保ちつつ，なくてもよさそうな括弧を省略するルールを決めておく．純粋に見やすさのためである．

- 最外側の括弧を省略する
  論理式のもっとも外側の括弧は省略しても良いことにする．例えば，次のようになる．

$$((\mathcal{P}\to\mathcal{Q})\vee(\mathcal{Q}\leftrightarrow\mathcal{R}))=(\mathcal{P}\to\mathcal{Q})\vee(\mathcal{Q}\leftrightarrow\mathcal{R})$$

- $\neg$ の周りの括弧を省略する
  例えば，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&(\neg\mathcal{P})=\neg\mathcal{P} \\
&(\neg(\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}))=\neg(\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q})
\end{aligned}
$$

以上の 2 つのルールを用いると

$$
\begin{aligned}
&((\neg\mathcal{P})\to\mathcal{Q})=\neg\mathcal{P}\to\mathcal{Q} \\
&((\mathcal{P}\to(\mathcal{Q}\wedge\mathcal{R}))\vee((\neg\mathcal{P})\to\mathcal{Q}))=(\mathcal{P}\to(\mathcal{Q}\wedge\mathcal{R}))\vee(\neg\mathcal{P}\to\mathcal{Q})
\end{aligned}
$$

というような形になって，見やすさが増す．

2.2.1 論理結合子の優先順位を補助的に考えておく

帰納的定義と上の 2 つのルールから，括弧が不適切に省かれることはありえないけれど，もしも何らかのミスで括弧がなかった場合，どのように括弧を補うかを決めるのがここでいう優先順位である．この優先順位は，左側の優先度が高いとして

$$\neg,\quad\{\wedge,\vee\},\quad\{\to,\leftrightarrow\}$$

とする．$\{\cdots\}$ で囲んであるものは，同じ優先順位である．したがってそれらが併記される場合は，括弧が使われていなくては判定ができないので，論理式の形の推測は不可能である．論より証拠で行く．$\wedge$ と $\vee$ は同じ優先順位であるので

$$\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}\vee\mathcal{R}$$

[*3] 「$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は同値」と発音されることが多いが，後述する命題と命題の関係である「論理的に同値」との境界が紛らわしい．「双条件文」という固有名詞もあるようだ．

[*4] 実はこれは Unique Readabillity Theorem という定理で保障されている．その証明には構造的帰納法が用いられる．戸田山 [3, pp.30-33] に丁寧な証明が記されている．

は曖昧すぎて評価できない．このようなときは，括弧をつかって，$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ かまたは $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ のどちらかであることを明示的に示されていなければならないのである．同様のことは，$\to$ と $\leftrightarrow$ にも言える事柄である．

$\neg$ はもっとも優先順位が高いので，次のような形になる：

$$
\begin{aligned}
(\neg\mathcal{P}) \wedge \mathcal{Q} &= \neg\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \\
(\neg\mathcal{P}) \leftrightarrow \mathcal{Q} &= \neg\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$ は，括弧をつかって優先順位を反映すると

$$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$$

となる．

$$\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R}$$

の場合は，優先順位を反映しても

$$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \leftrightarrow \mathcal{R}$$

であり，$\to$ と $\leftrightarrow$ の優先順位は同じなので，曖昧さが残る．もし

$$(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{S})$$

としたかったのであるのならば，このように括弧をきちんと利用しなくてはならない[*5]．

2.2.2 部分論理式と括弧の逆利用

$\mathcal{A} = \neg(\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leftrightarrow \mathcal{R}$ という論理式において，$\mathcal{A}$ 自身ではない論理式を部分論理式とよぶ．構成要素となっている論理式と考えれば良い．この $\mathcal{A}$ の場合では，

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \\
&\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \\
&\neg\mathcal{P} \\
&\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}
\end{aligned}
$$

すべてが部分論理式であり，これ以外にはない．

明示的に括弧を使用すると，その括弧の中に書かれている論理式全体を，ひとつのものとみなすことができるようになる．たとえば上の例で $\mathcal{B} := (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ とすれば $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{R}$ とあらわせる．うまく利用すれば，複雑な論理式がわかりやすいものになることがある．

[*5] 念のために注記しておくが，本稿での論理式の帰納的定義からは，このような優先順位を利用しての推測を行うような局面はありえない．論理式の生成規則にかならず括弧がついているからである．しかしながら，物によっては，この生成規則が括弧を使わない形式，すなわち $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ のように定義されていることがある．そのような場合には，優先順位と括弧の利用により曖昧さをなくすのである．そうではあるけれども，その定義形式だと，Unique Readbility Theorem（脚注 *4 (p.12) 参照）はうまく証明できそうにないと思われる．

第 3 章

意味論

命題論理の意味論を構築する．基本は，原子命題は命題定数 T か F のどちらかの値のみをとる[*1]という事柄である．そして T に「真」，F に「偽」という意味を付して，日常言語との距離を縮める．そのうえで，論理結合子の働きの結果に意味 T, F をあたえることによって，帰納的に定義された論理式についての意味論が形成される．

3.1 論理結合子の意味

論理結合子の意味は，命題定数をもちいて次のように決定される．いや，決定する，といった方が正確である．

定義 3.1. 論理結合子の意味

$\neg$:

$$\neg T = F, \quad \neg F = T$$

$\wedge$:

$$T \wedge T = T, \quad T \wedge F = F \wedge T = F \wedge F = F$$

$\vee$:

$$T \vee T = T \vee F = F \vee T = T, \quad F \vee F = F$$

$\rightarrow$:

$$T \rightarrow T = F \rightarrow T = F \rightarrow F = T, \quad F \rightarrow F = F$$

$\leftrightarrow$:

$$T \leftrightarrow T = F \leftrightarrow F = T, \quad T \leftrightarrow F = F \leftrightarrow T = F$$

このような無機的な論理結合子と命題定数の関係がなぜ「意味」といわれるのか？それは，T に真，F に偽，という日常言語をあたえて論理式が解釈されていくことになるからである[*2]．

3.2 真理表

原子命題は，T または F という値をもつものとする．この値をのことを，原子命題の真理値（または真偽値）という．原子命題の真理値に応じて論理結合子の意味を適用すると，原子命題と論理結合子との間で次の表がえられる．

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

[*1] もちろん T と F の「中間」のようなものもない．「わからない」「きまらない」というものをも許容する論理として多値論理という世界があるらしいけれど，それはまた別の話としよう．

[*2] 計算規則に意味を与えるといった感じだろうか．

このような表を真理表（または真偽表）という．

原子命題が T つまり「真」である状態は，「成り立つ」と言い換えることも可能である．他にも「満たす」「満たされる」「満足する」という日常語も使われる．

この真理表の示す事項は，先の論理記号の発音のところで取り入れた日常語とはそう差異のあるものではない．少なくとも $\neg$ と $\wedge$ についてはまったく異論の余地はなく，充分である．

相違があるとすれば，まず，$\vee$ である．日常語の感覚であれば，$p \vee q$ は p か q のどちらか一方，ということになるのが自然だろうが，この真理値の割り当てでは，両方とも T であっても良いのである．種をあかせば，後で出てくるド・モルガンの法則 $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ が成り立つことによる恩恵を被るためななのである．ひとつのご都合主義である（なおここで，先走って $\equiv$ という記号を使った．これは，「論理的に同値である」という事柄を強調したい時に使われる記号で，のちにその定義を示すものである）．因みにどちらか一方のみという場合を示すものとして「排他的論理和」というものを考え，それに特別の論理結合子を与えることもあるが，いまのところまだこれは必要はない．

記号 $\rightarrow$ も日常語の「ならば」からすれば，不自然である．通常の経験では，「ならば」には原因と結果の関係，すなわち因果律があるものと感じがちだ．それゆえ，原因となる p が偽のときでも $p \rightarrow q$ が真になるということに，疑念を抱くのである．さらに p が偽のときには q の真偽に関係なく真になるのだから，なおさらである．それゆえ，ここにはその因果関係はないのだと認識するしかない．つまり，p と q から新しい形の論理式をつくる演算子として，因果関係は忘れて，$\rightarrow$ を理解することが賢明なのだ．いわば，「p ならば q」という文自体すなわち「原因から結果を導くことの是非」を表現している論理式ととらえるのである．「偽ならば偽」「偽ならば真」ということは是であるとするのである．どうしてもというのならば，嘘から出た誠，とでも覚えるのが良いのかも知れない．ちなみに，こうしておくことによって，やはり後から出てくる対偶命題との関係で，p と q の真偽に関係なく $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ が成り立つことになる．これもまたある意味ご都合主義ではある．

次の様なすこし複雑な論理式についての真理表も，論理結合子の意味の定義 3.1 (p.14) をもとに作ることができる：

p_1	p_2	p_3	$p_2 \vee p_3$	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \wedge p_3$	$p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)$	$(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

p_1	p_2	p_3	$p_2 \wedge p_3$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \vee p_3$	$p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$	$(p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

論理式の帰納的定義から，一般の論理式 $\mathcal{P}$ は，原子命題と論理結合子の記号列であらわすことが可能となっている．逆に言えば，$\mathcal{P}$ の形成の履歴を辿れば，原子命題にいきつくのである．つまり，最後は原子命題と論理結合子のみで記述されることになる．そしてその結果は，上で見た結果をひとつづつあてはめていくことにより，最終的に T か F に帰着する（その一意性については，後述する真理値の割り当ての節で考える）．さらに，論理結合子には意味

が与えられていた．したがって．一般の論理式　$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ においても

$$
\begin{array}{c|c}
\mathcal{P} & \neg\mathcal{P} \\ \hline
T & F \\
F & T
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c|c|c|c}
\mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} & \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} & \mathcal{P} \to \mathcal{Q} & \mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \\ \hline
T & T & T & T & T & T \\
T & F & F & T & F & F \\
F & T & F & T & T & F \\
F & F & F & F & T & T
\end{array}
\tag{3.1}
$$

という真理表が成立するのである．

3.3　真理値の割り当てと解釈

原子命題は T か F のどちらかの値を持つとしたのであった．これはある意味命題の定義でもあって，「命題とは，T か F かが決められるものをいう」という言い方もなされる．ただし，この取り決めでは，命題の内容そのものがわからないと T, F が決まらない．通常それは，命題論理の外から，経験的事実や実験事実，他の理論の適用によって決められるものとなるだろう．命題論理の考察においては，いったんその外部理論による T, F の決定方法を置いておく．そして，命題が T, F と決まっていたらどうなるか，その生態を見て行ってみることにする．

まずはじめに，原子命題に T，F を割り当てる関数 m というものを考える．

$$
m(p) = \begin{cases} T \\ F \end{cases}
$$

という関数である．関数であるから，その値はひとつつまり T か F のどちらかに決まる．これは命題の定義とも整合している．

ここで $m(p)$, $m(q)$ についての真理表を，論理結合子の意味を適用して作成してみる．関数 m を 2 個の原子命題に適用するのだから，その関数値のパターンは全てで 4 通りとなることを考慮に入れれば

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{c|c}
m(p) & \neg m(p) \\ \hline
T & F \\
F & T
\end{array}
\\
\begin{array}{cc|c|c|c|c}
m(p) & m(q) & m(p) \wedge m(q) & m(p) \vee m(q) & m(p) \to m(q) & m(p) \leftrightarrow m(q) \\ \hline
T & T & T & T & T & T \\
T & F & F & T & F & F \\
F & T & F & T & T & F \\
F & F & F & F & T & T
\end{array}
\end{array}
\tag{3.2}
$$

となる．一方真理表のところで用いてきたものは

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{c|c}
p & \neg p \\ \hline
T & F \\
F & T
\end{array}
\\
\begin{array}{cc|c|c|c|c}
p & q & p \wedge q & p \vee q & p \to q & p \leftrightarrow q \\ \hline
T & T & T & T & T & T \\
T & F & F & T & F & F \\
F & T & F & T & T & F \\
F & F & F & F & T & T
\end{array}
\end{array}
\tag{3.3}
$$

であった．p, q の真理値は m で決定できるとした．したがって，それらから生成される論理式についての真理表 (3.3) (p.16) は，表 (3.2) (p.16) の関係を適用してもとまることになる．いままで真理表を使って真偽を確かめてきた行為は，このような事実を元にして行ってきたのである．この真理値割り当て関数というものを，一般の論理式にまで汎用化することを考える．

まず論理式を

- $\mathbb{L}$ の原子命題の集合を $\mathbb{A}$ とする
- $\mathbb{A}$ に含まれる原子命題から帰納的に定義される論理式の集合を $\mathbb{P}$ とする

と分類し，一般の論理式 $\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ に真理値を割り当てる関数の存在を仮定して M とあらわし

$$
\begin{aligned}
m &: \mathbb{A} \longmapsto \{T, F\} \quad &&（原子命題への真理値割り当て関数）\\
M &: \mathbb{P} \longmapsto \{T, F\} \quad &&（論理式への真理値割り当て関数）
\end{aligned}
$$

と定める．m は原子命題にしか適用できないものとしていることに注意．さてこのとき，M はどのようなものになるのか，課せられる条件は何なのか？

簡単な例から始める．$\mathcal{P} := p \wedge q$，$\mathcal{Q} := p \rightarrow q$ という論理式を考える，$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を構成する原子命題は p, q の２個であるから，原子命題 p, q の真偽と $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ の真偽を真理表で確認する．この場合は，原子命題に対する真理値割り当て関数 m は４通りあるから，それらを真理表の各行に名前をつけて割り振ることにすると

	p	q	$\mathcal{P} = p \wedge q$	$\mathcal{Q} = p \rightarrow q$
m_1	T	T	T	T
m_2	T	F	F	F
m_3	F	T	F	T
m_4	F	F	F	T

となる．原子命題への真理値割り当て関数 m_i のもとで決まる論理式 $\mathcal{P}$ の真理値を $M[m_i](\mathcal{P})$ のように書くことにすると（記号が若干わずらわしいが，いまはそれを我慢して）

$$
\begin{aligned}
M[m_1](\mathcal{P}) &= T, \quad M[m_1](\mathcal{Q}) = T\\
M[m_2](\mathcal{P}) &= F, \quad M[m_2](\mathcal{Q}) = F\\
M[m_3](\mathcal{P}) &= F, \quad M[m_3](\mathcal{Q}) = T\\
M[m_4](\mathcal{P}) &= F, \quad M[m_4](\mathcal{Q}) = T
\end{aligned}
$$

であり，$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ にも真理値が割り当てられることがわかる．そして，m が異なれば，$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ の真理値も異なることがあることもわかる．つまり，M は m に依存しているのである．m をどれかひとつに定めたときの論理式 $\mathcal{P}$ の真理値，すなわち $M[m_i](\mathcal{P})$ を，m_i のもとでの $\mathcal{P}$ の「解釈」という．

ここからは，記号の煩わしさを少なくするために，M と書いたらそれは m がどれか一つに定められているものとする．

さて，どのような m を使っても，$\mathcal{P}$ の解釈は T, F のどちらか（２通り）である．したがって，$M(\mathcal{P})$，$M(\mathcal{Q})$ に対しても論理結合子の意味の定義 3.1 (p.14) が適用できることが望ましい．仮に適用できるとすると，つぎのような真理表が成立することになる．

$M(\mathcal{P})$	$M(\mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P}) \wedge M(\mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P}) \vee M(\mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P}) \rightarrow M(\mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P}) \leftrightarrow M(\mathcal{Q})$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

(3.4)

そのためには，どのような条件が必要になるだろうか？

すくなくとも，原子命題に対する結果同じでなければなるまい．したがってまず

$$M(p) = m(p)\ .$$

それに加えて

(1) $M(\mathcal{P}) = T$ のときには $M(\neg\mathcal{P}) = F$.
$M(\mathcal{P}) = F$ のときには $M(\neg\mathcal{P}) = T$.

(2) $M(\mathcal{P}) = T$, $M(\mathcal{Q}) = T$ のときには $M(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) = T$.
それ以外のときには $M(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) = F$.

(3) $M(\mathcal{P}) = F$, $M(\mathcal{Q}) = F$ のときには $M(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = F$.
それ以外のときには $M(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = T$.

(4) $M(\mathcal{P}) = T$, $M(\mathcal{Q}) = F$ のときには $M(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) = F$.
それ以外のときには $M(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) = T$.

(5) $M(\mathcal{P}) = M(\mathcal{Q})$ のときには $M(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) = T$.
それ以外のときには $M(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) = F$.

という条件を課すことにする．この条件を真理表の形で書くと

$M(\mathcal{P})$	$\neg M(\mathcal{P})$
T	F
F	T

$M(\mathcal{P})$	$M(\mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$	$M(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q})$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

となる．これと (3.4) (p.17) を見比べると，次の事柄が成立すればよいことになる：

$$\begin{aligned}
&M(\neg\mathcal{P}) = \neg M(\mathcal{P}) \\
&M(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) = M(\mathcal{P}) \wedge M(\mathcal{Q}) \\
&M(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = M(\mathcal{P}) \vee M(\mathcal{Q}) \\
&M(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) = M(\mathcal{P}) \to M(\mathcal{Q}) \\
&M(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) = M(\mathcal{P}) \leftrightarrow M(\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

この結果は，論理式の解釈が，論理式の帰納的定義と並行していることを示している．「並行している」という事柄の意味は，たとえば論理式の帰納的定義から生成される $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ の真理値が，$\mathcal{P}$ の真理値と $\mathcal{Q}$ の真理値に論理結合子の意味を適用することによって決定される，ということである．もちろんそこには，最初に原子命題に対しての真理値が決定されているという条件が必要ではある．その結果，真理値の決定も帰納的になるのである．

真理値の割り当て M が一意である，つまり，M によってすべての論理式に T か F のどちらかが割り当てられる，ということを証明しておく．構造的帰納法による証明である．

証明.

(1) 原子命題 p に関しては，$M(p) = m(p)$ であった．そして m は全ての原子命題に対して T か F のどちらかを割り当てる関数であったから，M によってもすべての原子命題に対して T か F のどちらかが割り当てられる．

(2) 論理式 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に対して，M によって T か F のどちらかが割り当てられていると仮定する．

(3) M が $\mathcal{P}$ に対して T を割り当てているならば $\neg\mathcal{P}$ は F である．F を割り当てているならば，$\neg\mathcal{P}$ は T である．したがって，$\neg\mathcal{P}$ は M によって T か F のどちらかが割り当てられる．

(4) M が $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に対して T を割り当てているならば $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ は T である．それ以外の割り当てであるならば，$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ は F である．したがって，$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ は M によって T か F のどちらかが割り当てられる．

(5) M が $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に対して F を割り当てているならば $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ は F である．それ以外の割り当てであるならば，$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ は F である．したがって，$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ は M によって T か F のどちらかが割り当てられる．

(6) $\to$, $\leftrightarrow$ についても同様の説明が成り立つ．

(7) 以上より，全ての論理式は M によって T か F のどちらかが割り当てられる．

□

さて，ある定められた m のもとで作成される関数 M は，まず第一にすべての原子命題 p にたいして $M(p) = m(p)$ であった．そして，M はすべての論理式に T または F をかならず与える（上で述べた一意性）こともわかった．この結果から，m を決めれば M が定まることがわかる．したがって，とりたてて m と M を区別する必要がないことがわかる．今後は，主として M を使っていくことにする．

これまでの真理表の作成行為を反省すると，じつは，無意識のうちに真理値割り当て関数を想定して，そのおのおのの場合について論理結合子の意味を適用し，論理式の真偽の判定をしていた，ということだったのである．さきに，簡単な例をみた．ここでもうひとつ，$\mathbb{A} = \{\,p_1, p_2, p_3\,\}$ 3 個の原子命題で構成されている例をみてみる．その真理値割り当てのパターンは $2^3 = 8$ 通りにであるから，$\mathcal{P} = (p_1 \wedge p_2) \vee p_3$ の真偽を真理表で考えると

p_1	p_2	p_3	$p_1 \wedge p_2$	$\mathcal{P} = (p_1 \wedge p_2) \vee p_3$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

であり，あらわに真理値割り当て関数を書けば

	$M(p_1)$	$M(p_2)$	$M(p_3)$	$M(p_1 \wedge p_2)$	$M(\mathcal{P}) = M((p_1 \wedge p_2) \vee p_3)$
M_1	T	T	T	T	T
M_2	T	T	F	T	T
M_3	T	F	T	F	T
M_4	T	F	F	F	F
M_5	F	T	T	F	T
M_6	F	T	F	F	F
M_7	F	F	T	F	T
M_8	F	F	F	F	F

とっている．真理表は，真理値割り当てのパターン全て，つまり M のパターンすべてに対して，論理式の真偽を書きあらわしていたのである．これによって真理表 (3.1) (p.16) が正当化されてくるのである．

$\mathbb{L}$ の原子命題の集合が $\mathbb{A} = \{\,p_1, p_2, \ldots, p_n\,\}$ と有限であるとすれば, 真理値割り当てのパターンは, p_i には T と F の 2 つの場合が存在することから，2^n 個になる．すなわち，真理値割り当て関数 M は M_1，M_2，...，M_{2^n} という独立した関数の集まりからなる．そしてこれも有限個である．そのパターンひとつひとつを「$\mathbb{L}$ の解釈 (interpretation)」という．論理式の解釈を $\mathbb{L}$ にまで拡大した物言いである．そのうちのどれか一つを選択することを，$\mathbb{L}$ についての解釈を定める，という[*3].

この「解釈」の定義は，原子命題が無限個ある場合にも適用できる．ただそのときは，解釈の個数すなわち M の個数も無限個となる．けれども，そのうちのどれかひとつを選べば，解釈が定まるのである[*4].

[*3] M は，原子命題に対する真理値の割り当て m によって一意に決まるものであった．その原子命題に対する真理値の割り当てを，集合の表記方法をつかって

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{\,p_1 = T, p_2 = F, p_3 = T, \cdots, p_n = T\,\} \\
M_2 &= \{\,p_1 = T, p_2 = T, p_3 = F, \cdots, p_n = T\,\} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

というように書く流儀もある．さらに，書いてないものは F と取り決めて

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{\,p_1, p_3, \cdots, p_n\,\} \\
M_2 &= \{\,p_1, p_2, \cdots, p_n\,\} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

というようにも表記する流儀もある．さらに一歩進めて，添字集合（index set）を使うというやり方を見たことがある．今の場合は，添字集合として $\mathbb{N}$（自然数の集合）を使うのが自然で，T となる原子命題の添字を集合の要素とすることによって $\mathbb{M}_1 = \{\,1, 3, \cdots, n\,\}$ という集合が得られる．これは $\mathbb{N}$ の部分集合に他ならないから，M_1 による真理値の割り当てとは，添字集合の部分集合を決定することに他ならない，という見方も成立するのである．もちろん M_2 についても同様で，そしてかならず $M_1 \neq M_2$ となる．すくなからずペダンティックな見方である．

[*4] ひとつを選べたらの話である．可算無限個であるならば問題はなく，あまり神経質になる必要もない（はずである）.

3.4 意味論による論理式の分類

言語 $\mathbb{L}$ と真理値割り当て M（簡略化して $\mathbb{L}+M$）の元で，論理式の分類をする．また，真理値割り当て関数 M はおのおの独立な関数の集まりであった．これから，個別の真理値割り当て関数を扱う場合や，全ての真理値割り当て関数をいっしょくたに扱う場合があるので

M_i ：ある特定の真理値割り当て関数をあらわす（$i=1,2,\ldots$）
M_* ：全ての真理値割り当て関数をあらわす．すなわち全ての M_i において，ということ．

という簡便的記法を用いることにする．

3.4.1 トートロジー

どのような真理値割り当て関数においても（すなわち全ての解釈において）$\mathcal{P}$ が T となるとき，$\mathcal{P}$ はトートロジー（tautology）（恒真命題，valid な命題）であるという．言い換えれば $M_*(\mathcal{P})=T$ となる論理式 $\mathcal{P}$ がトートロジーである．

またこれが T ではなく F であるとき, つまり $M_*(\mathcal{Q})=F$ のとき, $\mathcal{Q}$ を矛盾命題（恒偽命題, contradiction）という．

代表的なトートロジーとその数学用語を列挙しておく[*5]：

$$
\begin{array}{ll}
\text{同一律:} & \mathcal{P}\to\mathcal{P},\ \mathcal{P}\leftrightarrow\mathcal{P} \\
\text{排中律:} & \mathcal{P}\lor\neg\mathcal{P} \\
\text{矛盾律:} & \neg(\mathcal{P}\land\neg\mathcal{P}) \\
\text{二重否定律:} & \neg\neg\mathcal{P}\leftrightarrow\mathcal{P} \\
\text{べき等律:} & (\mathcal{P}\land\mathcal{P})\leftrightarrow\mathcal{P}, \\
 & (\mathcal{P}\lor\mathcal{P})\leftrightarrow\mathcal{P} \\
\text{交換律:} & (\mathcal{P}\land\mathcal{Q})\leftrightarrow(\mathcal{Q}\land\mathcal{P}), \\
 & (\mathcal{P}\lor\mathcal{Q})\leftrightarrow(\mathcal{Q}\lor\mathcal{P}) \\
\text{結合律:} & (\mathcal{P}\land(\mathcal{Q}\land\mathcal{R}))\leftrightarrow((\mathcal{P}\land\mathcal{Q})\land\mathcal{R}), \\
 & (\mathcal{P}\lor(\mathcal{Q}\lor\mathcal{R}))\leftrightarrow((\mathcal{P}\lor\mathcal{Q})\lor\mathcal{P}) \\
\text{分配律:} & (\mathcal{P}\land(\mathcal{Q}\lor\mathcal{R}))\leftrightarrow((\mathcal{P}\land\mathcal{Q})\lor(\mathcal{P}\land\mathcal{R})), \\
 & (\mathcal{P}\lor(\mathcal{Q}\land\mathcal{R}))\leftrightarrow((\mathcal{P}\lor\mathcal{Q})\land(\mathcal{P}\lor\mathcal{R})) \\
\text{吸収律:} & (\mathcal{P}\land(\mathcal{P}\lor\mathcal{Q}))\leftrightarrow\mathcal{P}, \\
 & (\mathcal{P}\lor(\mathcal{P}\land\mathcal{Q}))\leftrightarrow\mathcal{P} \\
\text{ド・モルガンの法則:} & \neg(\mathcal{P}\land\mathcal{Q})\leftrightarrow(\neg\mathcal{P}\lor\neg\mathcal{Q}), \\
 & \neg(\mathcal{P}\lor\mathcal{Q})\leftrightarrow(\neg\mathcal{P}\land\neg\mathcal{Q}) \\
\text{対偶律:} & (\mathcal{P}\to\mathcal{Q})\leftrightarrow(\neg\mathcal{Q}\to\neg\mathcal{P}) \\
\text{modus ponens:} & (\mathcal{P}\land(\mathcal{P}\to\mathcal{Q}))\to\mathcal{Q} \\
\text{modus tollens:} & (\neg\mathcal{Q}\land(\mathcal{P}\to\mathcal{Q}))\to\neg\mathcal{P} \\
\text{選言三段論法:} & (\neg\mathcal{P}\land(\mathcal{P}\lor\mathcal{Q}))\to\neg\mathcal{Q} \\
\text{仮言三段論法（推移律）:} & ((\mathcal{P}\to\mathcal{Q})\land(\mathcal{Q}\to\mathcal{R}))\to(\mathcal{P}\to\mathcal{R}) \\
\text{構成的両刀論法:} & ((\mathcal{P}\to\mathcal{R})\land(\mathcal{Q}\to\mathcal{R}))\leftrightarrow((\mathcal{P}\lor\mathcal{Q})\to\mathcal{R}) \\
\text{？？:} & ((\mathcal{P}\to\mathcal{Q})\land(\mathcal{P}\to\mathcal{R}))\leftrightarrow(\mathcal{P}\to(\mathcal{Q}\land\mathcal{R}))
\end{array}
\tag{3.5}
$$

[*5] 排中律と矛盾律の表現には若干とまどう．排中律については $\mathbb{P}\cap\overline{\mathbb{P}}=\varnothing$ と集合論で馴染んできたので，ここでいう矛盾律の方が，感覚的距離が排中律に近いように思われる．

なお，後述する論理的な同値変形で重宝するので，命題定数を含んだトートロジーも付け加えておく：

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{P} \land T) \leftrightarrow \mathcal{P}, \quad (\mathcal{P} \land F) \leftrightarrow F \\
&(\mathcal{P} \lor T) \leftrightarrow T, \quad (\mathcal{P} \lor F) \leftrightarrow \mathcal{P} \\
&\mathcal{P} \to T^{*6}, \quad F \to \mathcal{P} \\
&(\mathcal{P} \to F) \to \neg\mathcal{P}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

真理値割り当て関数は複数存在するが，どれを採用しても論理式に対する真理値は T か F のどちらかになる．したがって，考えられる真理値割り当てのパターンすべてにおいて，考察する対象の論理式が T であればトートロジーであることが示されることになる．また，すべて F となればそれは矛盾命題ということになる．modus ponens でその状況を確認してみる．$\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ に対しての真理値割り当てのパターンは 4 種類だから，真偽値割り当て関数の結果はその 4 パターン M_1，M_2，M_3，M_4 に収斂され，その各々について真理表は

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \land (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$	$(\mathcal{P} \land (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})) \to \mathcal{Q}$
M_1	T	T	T	T	T
M_2	T	F	F	F	T
M_3	F	T	T	F	T
M_4	F	F	T	F	T

となるから

$$M_*\Big(((\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \land \mathcal{P}) \to \mathcal{Q}\Big) = T$$

となって，トートロジーであることが示される．

矛盾命題の例をあげると

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \land \neg\mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \land (\mathcal{P} \land \neg\mathcal{Q})$
M_1	T	T	F	T	F	F
M_2	T	F	T	F	T	F
M_3	F	T	F	T	F	F
M_4	F	F	T	T	F	F

であるから

$$M_*\Big((\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \land (\mathcal{P} \land \neg\mathcal{Q})\Big) = F$$

であり矛盾命題であることが導かれる．

3.4.2 充足可能

ある特定の真理値割り当て M_i を使うことによって論理式 $\mathcal{P}$ が $M_i(\mathcal{P}) = T$ となるとき，「M_i は $\mathcal{P}$ を充足する」「M_i は $\mathcal{P}$ を充足可能である」という．

先の真理表を再利用すると

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \land (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$
M_1	T	T	T	T
M_2	T	F	F	F
M_3	F	T	T	F
M_4	F	F	T	F

となるから

$$M_1\Big((\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \land \mathcal{P}\Big) = T$$

となっている．すなわち，M_1 は，$(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \land \mathcal{P}$ を充足するのである．

このような論理式を事実命題とも呼ぶ．

*6 これがトートロジーなのであるから，驚きである．

3.4.3 論理式の分類と言葉遣い

ここまで見てきたように，$\mathbf{L} + M$ のもとで，命題は

- トートロジー（恒真命題）：全ての解釈で真
- 矛盾命題：全ての解釈で偽
- 事実命題：真となる解釈が存在するが，全ての解釈で真ではない

の 3 個に分類できることになる．そしてそれぞれの分類については，文献などによってさまざまな言葉が使われるので，ここでそれらをまとめておく．

<table>
<tr><td colspan="3">論理式</td></tr>
<tr><td colspan="2">充足可能
satisfiable
consistent</td><td>充足不可能
unsatisfiable
inconsistent</td></tr>
<tr><td>トートロジー</td><td>事実命題</td><td>矛盾命題</td></tr>
<tr><td>tautology
valid</td><td>contingency
invalid</td><td>contradiction
invalid</td></tr>
</table>

表 3.1: 論理式分類表

さてここで，構想的帰納法の練習もかねて，

定理 3.1. 論理結合子として $\wedge$ と $\rightarrow$ しか持たない論理式は充足可能である

という定理を証明してみよう．

証明. 全ての原子命題に T を割り当てる真理値割り当て関数を M_T とする．

(1) 原子命題は，この M_T の定義からすべて T である．

(2) $\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ が M_T によって T が割り当てられていると仮定する．

(3) $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ も T になる．なぜならば，$M_T(\mathcal{P}) = T$，$M_T(\mathcal{Q}) = T$ であるから，$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ は T になる．

(4) $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ も T になる．なぜならば，$M_T(\mathcal{P}) = T$，$M_T(\mathcal{Q}) = T$ であるから，$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ も T になる．

(5) 以上より，論理結合子として $\wedge$ と $\rightarrow$ しか持たない論理式は M_T のもとで T になるから，充足可能である．

$\square$

第 4 章

論理的同値性と同値変形

4.1 論理的同値性

論理式 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が，真理値割り当てすべてにおいて（つまりすべての解釈のもとで）値が一致する時，すなわち

$$M_*(\mathcal{P}) = M_*(\mathcal{Q}) \quad \text{または} \quad M_i(\mathcal{P}) = M_i(\mathcal{Q}) \ \ (\text{for all } i)$$

となっているとき，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は．論理的同値であるといい $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ と書く．この記号 $\equiv$ はメタ言語記号であり，論理結合子 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ との演算や法則などは存在しない．

$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ と $\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ について，その真理表を書いてみる．$\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ に対して割り当てられる真理値のパターンは４種類だから（この考え方は，さきに modus ponens がトートロジーであることを見たときと同様である），それらを M_1，M_2，M_3，M_4 とすれば

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
M_1	T	T	T	T
M_2	T	F	F	F
M_3	F	T	T	T
M_3	F	F	T	T

となる．したがって

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \ \equiv \ \neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$$

となっているのである．同様のことを試みれば

$$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \ \equiv \ (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P})$$

であることも導き出せる．

4.1.1 論理的同値性とトートロジーの関係

論理的な同値性 $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ と， 論理結合子 $\leftrightarrow$ で生成される命題 $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ との間には，興味深い事実がある．論理的に同値な命題は，その解釈全てにおいて論理式の値が一致するということであった．論理式 $\mathcal{P}$ については，その値は $\mathcal{P}$ が T か F の２通りしかない．それゆえ，$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ （すなわち $M_*(\mathcal{P}) = M_*(\mathcal{Q})$）であるならば

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$
M_1	T	T
M_2	F	F

という真理表になる．この２つの解釈しかないことに留意である．一方で，$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ の真理表は

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$
M'_1	T	T	T
M'_2	T	F	F
M'_3	F	T	F
M'_4	F	F	T

とあらわせる．それゆえ，$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ であるときには，この真理表の解釈から M_1' と M_4' のみが採用されることになる．したがって

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$
M_1	T	T
M_2	F	F

のとき

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$
M_1'	T	T	T
M_4'	F	F	T

となって，$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ はトートロジーとなっていることがわかる．言い換えれば，$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ は $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ がトートロジーであることを意味している，ということになる．逆もしかりであることはあきらかである．つまり

$$\mathcal{P} \ \equiv \ \mathcal{Q} \ \Leftrightarrow \ (\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) \text{ はトートロジーである}$$

ということになるのである．さらに，$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \ \equiv \ (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})$ であるから，$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ の真理値も上の真理表に加えてみると

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$
M_1'	T	T	T	T	T
M_4'	F	F	T	T	T

であるから $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，$\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ ともにトートロジーになっているのである．定理としてまとめておこう（証明は今見てきた通り）．

定理 4.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \ \equiv \ \mathcal{Q} \ &\Leftrightarrow \ (\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) \text{ はトートロジーである} \\ &\Leftrightarrow \ \mathcal{P} \to \mathcal{Q},\ \mathcal{Q} \to \mathcal{P} \text{ ともにトートロジーである} \end{aligned}$$

(3.5) (p.20) で列挙したトートロジーを論理的同値性から眺めてみると次のようになる（一応，言葉遣いを「律」から「法則」に変えてみた）：

同一法則:	$\mathcal{P} \ \equiv \ \mathcal{P}$
二重否定法則:	$\neg\neg\mathcal{P} \ \equiv \ \mathcal{P}$
べき等法則:	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{P} \ \equiv \ \mathcal{P}$,
	$\mathcal{P} \vee \mathcal{P} \ \equiv \ \mathcal{P}$
交換法則:	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \ \equiv \ \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$,
	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \ \equiv \ \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$
結合法則:	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \ \equiv \ (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$,
	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \ \equiv \ (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{P}$
分配法則:	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \ \equiv \ (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$,
	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \ \equiv \ (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
吸収法則:	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \ \equiv \ \mathcal{P}$,
	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \ \equiv \ \mathcal{P}$
ド・モルガンの法則:	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \ \equiv \ \neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}$,
	$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \ \equiv \ \neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$
対偶法則:	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \ \equiv \ \neg\mathcal{Q} \to \neg\mathcal{P}$
構成的両刀論法:	$(\mathcal{P} \to \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \ \equiv \ (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \to \mathcal{R}$
？？:	$(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \to \mathcal{R}) \ \equiv \ \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$

(3.6) (p.21) についても記載しておく：

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \wedge T \ &\equiv \ \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \wedge F \ \equiv \ F \\ \mathcal{P} \vee T \ &\equiv \ T, \quad \mathcal{P} \vee F \ \equiv \ \mathcal{P} \end{aligned}$$

4.1.2 その他の有用な論理的同値性

次のものも有用である：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \;\equiv\; \neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \;\equiv\; \neg(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \quad \text{（対偶法則の仲間）}\\
&\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \;\equiv\; (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})\\
&\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \;\equiv\; \mathcal{Q} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R}) \quad \text{（入れ替え法則）}\\
&\neg T \;\equiv\; F, \quad \neg F \;\equiv\; T
\end{aligned}
$$
[*1]

これらの論理的に同値な関係を利用していけば，真理表を書く機会が節約されてくる．

4.2 同値変形

論理的同値性を利用した変形の実践をみてみる．

まず，論理式全体に対して俯瞰した観点からの同値変形である．例題として $\neg\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ を考える．全体を俯瞰すると，これは $\neg\neg\mathcal{P}$ であるとみなせるから，$\neg\neg\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$ を使って

$$\neg\neg\neg(\neg p \vee \neg q) \;\equiv\; \neg(\neg p \vee \neg q)$$

と同値変形できる．ここで右辺全体にド・モルガンの法則をつかって同値変形すると

$$\equiv\; \neg\neg p \wedge \neg\neg q$$

となる．ここまでは問題ない．これを前進させて，個別につまり部分論理式にも同値変形の結果を適用して

$$\equiv\; p \wedge q$$

としたいところだが，この同値変形は保証されるのだろうか？

4.2.1 置き換えの定理

結論から言えば，上の同値変形は保証される．それを証明しておく．

まず，論理式 $\mathcal{P}$ を部分論理式として何個か含む論理式を $C[\mathcal{P}]$ と書くことにする．そしてこの $\mathcal{P}$ を別の論理式 $\mathcal{Q}$ で置き換えたものを $C[\mathcal{Q}]$ と書く．ただし，この置き換えは，全ての $\mathcal{P}$ に対して行わなくても良いものとする．この準備の下で，証明に入る．

定理 4.2. 強い置き換えの定理

$$(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) \to (C[\mathcal{P}] \leftrightarrow C[\mathcal{Q}]) \text{ はトートロジーである．}$$

証明.

(1) $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の真理値が異なる時は，$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ は F である．したがって $\to$ の左辺は F であるから，右辺の真理値にかかわらず論理式全体は T となる．

(2) $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の真理値が同じであるならば，$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ は T である．また，$C[\mathcal{P}]$ と $C[\mathcal{Q}]$ においては，$C[\mathcal{P}]$ の部分論理式 $\mathcal{P}$ のいくつかが $\mathcal{Q}$ に変わっているだけで，論理式全体の構造は変化していない．そして，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の真理値は同じなのであるから，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の違いは全体の真理値になにも影響しない．それゆえ，$C[\mathcal{P}]$ と $C[\mathcal{Q}]$ の真理値は一致する．つまり $C[\mathcal{P}] \leftrightarrow C[\mathcal{Q}]$ は T である．したがって $\to$ の左辺は T，右辺も T であるので，論理式全体は T となる．

(3) 以上から，つまり，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の真理値が異なっている場合でも同じ場合でも，全体は T となる．つまり真理値のパターン全ての場合において T になるのであるから，これはトートロジーに他ならない．

[*1] 命題定数 T，F の定義と言えばそれまでであるのだが...

□

定理 4.3. $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ がともにトートロジーであるとき，$\mathcal{Q}$ もトートロジーである．

証明.（背理法（帰謬法）を利用する）
$\mathcal{Q}$ がトートロジーではないとしてみる．すると，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ を構成する原子命題への真理値割り当て関数のなかで，$\mathcal{Q}$ を F にする関数が存在していることになる．その真理値割り当て関数を M_F とすれば，

$$M_F(\mathcal{Q}) = F \ .$$

ところで，$\mathcal{P}$ はトートロジーであるとしているのだから

$$M_F(\mathcal{P}) = T \ .$$

したがって

$$M_F(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) = M_F(\mathcal{P}) \to M_F(\mathcal{Q}) = T \to F = F$$

となるけれども，そもそも $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ はトートロジーであるとしているのだから

$$M_F(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) = T$$

でなければならず，矛盾が生じている．これは，$\mathcal{Q}$ がトートロジーでないとしたことに起因しているので，結果 $\mathcal{Q}$ はトートロジーであることになる． □

定理 4.4. $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が論理的に同値であれば，$C[\mathcal{P}]$ と $C[\mathcal{Q}]$ も論理的に同値である．つまり，ある論理式の部分論理式をそれと論理的に同値な論理式に置き換えても，もとの論理式と論理的に同値になる．

証明.
上の定理 4.2 (p.25) （強い置き換えの定理）から

$$(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) \to (C[\mathcal{P}] \leftrightarrow C[\mathcal{Q}])$$

はトートロジーであることが言える．そして，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が論理的に同値すなわち $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ であるとするのだから $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ はトートロジーであることになる．その結果に定理 4.3 (p.26) を適用すれば，$C[\mathcal{P}] \leftrightarrow C[\mathcal{Q}]$ がトートロジーであることがわかる．それゆえ，$C[\mathcal{P}] \equiv C[\mathcal{Q}]$ である．つまり，置き換えても論理的に同値なのである． □

これで，部分論理式に対しても，論理的に同値な論理式への置き換えが保証されることになる．

4.2.2 ラフスケッチ

今見てきたように，きちんとした証明のもとで同値変形保証されるのであるが，ラフスケッチとしての次のような考え方もありだと思う．論理式 $\mathcal{U}$ が，形式的に

$$\mathcal{U} = \mathcal{P} \ \underline{\mathrm{op}} \ (\mathcal{Q} \ \underline{\mathrm{op}} \ \mathcal{R})$$

のように記述できたとしよう．この $\underline{\mathrm{op}}$ は論理結合子のどれかを代表しているものである．さてここで，真理値割り当てを施してみよう．解釈全てに対して

$$\begin{aligned} M_*(\mathcal{U}) &= M_*(\mathcal{P} \ \underline{\mathrm{op}} \ (\mathcal{Q} \ \underline{\mathrm{op}} \ \mathcal{R})) \\ &= M_*(\mathcal{P}) \ \underline{\mathrm{op}} \ M_*(\mathcal{Q} \ \underline{\mathrm{op}} \ \mathcal{R}) \\ &= M_*(\mathcal{P}) \ \underline{\mathrm{op}} \ M_*(\mathcal{Q}) \ \underline{\mathrm{op}} \ M_*(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

が成立するのであった．そしていま $\mathcal{Q}$ と論理的に同値な命題 $\mathcal{Q}'$ を考えると，$M_*(\mathcal{Q}) = M_*(\mathcal{Q}')$ であるから（これは $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}'$ の定義そのもの）

$$M_*(\mathcal{P}) \ \underline{\mathrm{op}}\ M_*(\mathcal{Q}) \ \underline{\mathrm{op}}\ M_*(\mathcal{R}) = M_*(\mathcal{P}) \ \underline{\mathrm{op}}\ M_*(\mathcal{Q}') \ \underline{\mathrm{op}}\ M_*(\mathcal{R}) = M_*(\mathcal{P} \ \underline{\mathrm{op}}\ \mathcal{Q}' \ \underline{\mathrm{op}}\ \mathcal{R})$$

となる．つまり，

$$\mathcal{P} \ \underline{\mathrm{op}}\ (\mathcal{Q} \ \underline{\mathrm{op}}\ \mathcal{R})) \ \equiv\ \mathcal{P} \ \underline{\mathrm{op}}\ (\mathcal{Q}' \ \underline{\mathrm{op}}\ \mathcal{R})$$

ということであり，これは $\mathcal{U}$ を構成する $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{Q}'$ に変えたものも論理的に同値である，ということを示している．

この結果を敷衍しよう．$\mathcal{U} = \cdots \mathcal{Q} \cdots$ のように，論理式 $\mathcal{U}$ のある部分を構成する部分論理式を $\mathcal{Q}$ として，それを $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}'$ に置き換えた論理式 $\mathcal{U}' = \cdots \mathcal{Q}' \cdots$ とすれば

$$\mathcal{U} \ \equiv\ \mathcal{U}'$$

が成り立つのである．この事実から，論理式のある部分で計算操作がやりやすい（またはわかりやすい）部分を探し出し，それを論理的に同値な命題に変換して，計算を進めていっても問題がないことが保証される[*2]．置き換えられる論理的に同値な命題は，今まで見た各種の法則から探し出すことができるだろう．要は，同値変形はいつでもどこでもやっても良い．ということだ．

簡単な例で納得しておこう．$\mathcal{U} = ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \to \neg(\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}))$ であるとすると，まず $\neg(\mathcal{R} \wedge \mathcal{S})$ は $\mathcal{U}$ の部分論理式であることは間違いない．そして $\neg(\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}) \equiv \neg\mathcal{R} \vee \neg\mathcal{S}$ という論理的な同値性があるので，これを $\mathcal{U}$ に用いる．その他，今まで手に入れた他の同値関係も援用して

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \to \neg(\mathcal{R} \wedge \mathcal{S})) && \text{（ド・モルガンの法則を適用する）}\\
&= ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \to (\neg\mathcal{R} \vee \neg\mathcal{S})) && \text{（$\to$ を分解する）}\\
&= (\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\neg\mathcal{R} \vee \neg\mathcal{S})) && \text{（再びド・モルガンの法則を適用する）}\\
&= ((\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}) \vee (\neg\mathcal{R} \vee \neg\mathcal{S})) && \text{（同一論理演算の繰り返しなので括弧が取れる）}\\
&= (\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q} \vee \neg\mathcal{R} \vee \neg\mathcal{S})
\end{aligned}$$

という，論理結合子がひとつしかない単純な結果が得られる．

排中律から $\mathcal{R} \vee \neg\mathcal{R} \equiv T$，矛盾律から $\mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{R} \equiv F$ という論理的な同値関係が存在する．$\mathcal{R} \wedge T \equiv \mathcal{R}, \mathcal{R} \vee F \equiv \mathcal{R}$ という論理的同値関係もある．加えて，$\mathcal{R} \vee T \equiv T, \mathcal{R} \wedge F \equiv F$ というものもある．これらを利用して，modus ponens を同値変形すると

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})) \to \mathcal{Q} \ &\equiv\ (\mathcal{P} \wedge (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})) \to \mathcal{Q}\\
&\equiv\ \neg(\mathcal{P} \wedge (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})) \vee \mathcal{Q}\\
&\equiv\ \neg((\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{P}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})) \vee \mathcal{Q}\\
&\equiv\ \neg(F \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})) \vee \mathcal{Q}\\
&\equiv\ \neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q}\\
&\equiv\ (\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q}\\
&\equiv\ \neg\mathcal{P} \vee (\neg\mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q})\\
&\equiv\ \neg\mathcal{P} \vee T\\
&\equiv\ T
\end{aligned}$$

となって，$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ の解釈に関わらず真であることがわかる，すなわち modus ponens はトートロジーであることが，論理的な同値変形から導き出せる．真理表を書くよりは効率的である．

[*2] 実際に我々が行っている数学的な計算行為は，常に定義に戻ってそこから計算を始める，というようなものではない．わかっている事実はどんどん使え，ということが圧倒的なのである．それは，ここに述べたことと非常に似通っている．

4.3 括弧の省略再び

結合法則の結果にすこし注目してみよう．結合法則から

$$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \;\equiv\; \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$$

ということが成り立つので，今ここに $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$ という論理式があったとき，それを $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ と見ても $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ と見ても同じ結果となることが保証されている．つまり

$$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \;\equiv\; \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \;\equiv\; \mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$$

ということになる．これを繰り返して敷衍すれば，$\wedge$ のみで構成されている論理式は，途中の括弧を省略して

$$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_{n-1} \wedge \mathcal{P}_n$$

とあらわせることになる．

$\vee$ も同様で，

$$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \;\equiv\; \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \;\equiv\; \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$$

となるから，$\vee$ のみで構成されている論理式も

$$\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_{n-1} \vee \mathcal{P}_n$$

とあらわせる．

この結果をうけて，さらに記法の簡便性を追求して

$$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_{n-1} \wedge \mathcal{P}_n =: \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$$
$$\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_{n-1} \vee \mathcal{P}_n =: \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$$

と書くときもある[*3]．

$\rightarrow$ が結合法則の対象でないことは，次の真理表からあきらかである：

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}$	$\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R})$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

$\leftrightarrow$ については結合法則は成立する．真理表をかけば

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \leftrightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) \leftrightarrow \mathcal{R}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow (\mathcal{Q} \leftrightarrow \mathcal{R})$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F

[*3] もちろん和を表す $\sum$ や積をあらわす $\prod$ の流用である．しかし考えてみると，和をわざわざ $\sum$ とするのではなく，$+$ を直接的に使ったほうがわかりやすかったのではないか？ $\underset{n}{+} a_n$ のように（積についても，$\underset{n}{\times} a_n$ のように）．

であるから，次の様に括弧を省略することが可能である：

$$(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}) \leftrightarrow \mathcal{R} \;\equiv\; \mathcal{P} \leftrightarrow (\mathcal{Q} \leftrightarrow \mathcal{R}) \;\equiv\; \mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \leftrightarrow \mathcal{R}\,.$$

さらにもうひとつ，$\neg$ の繰り返しについても，紛らわしさがないので

$$(\neg(\neg(\cdots(\neg(\neg\mathcal{P}))))) \;\equiv\; \neg\neg\cdots\neg\mathcal{P}$$

というように省略することも認めることにする．

第 5 章

論証

論理学の目指すところは

- どんな論証についてもあてはまる「妥当」性の定義
- ある論証が与えられた時，それが「妥当」であるかどうかを判定する手続き

というものを見出すことにある[*1].

意味論による論理式の分類 3.4 (p.20) 節で，単一の論理式に対してトートロジーや充足可能性をみてきた（そこで使われる用語を表 3.1 (p.22) にまとめた）．論証という行為の考察では，トートロジーや充足可能性を論理式の集合に拡張していくことになる．

5.1 論理式の集合 Γ と充足性

論理式の集合を $\Gamma = \{\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \cdots\}$ であらわす．この書き方からもわかるように，Γ は有限集合の場合もあるし，無限集合の場合もある．

Γ の要素であるすべての論理式に対して T を割り当てる真理値割り当て関数 M がひとつでも存在するとき

- Γ は充足可能（satisfiable）
- Γ は整合的（consistent）

という．「ひとつでも存在する」というところに注意．もちろん複数あってもよい．最低限ひとつは存在する，ということである．

これとは逆に，Γ の要素全てを T にする真理値割り当て関数が存在しないとき

- Γ は充足不可能（unsatisfiable）
- Γ は矛盾している（inconsistent）

という．こちらは，「ひとつも存在しない」という強い条件を述べていることに注意である．

天下り的な用語の定義であるが，論証の過程を整理する際に見通しがよくなる定義である．

5.2 論証の妥当性

5.2.1 論証の構造

論証という行為を素描すると

[*1] 戸田山教科書よりその骨格を借用．ただしそこでは，「推論」という言葉は用いられていない．かなりまえの方で，「当面は論証と推論は同じ意味であるとする」というようなことが述べられている．微妙なニュアンスの違いはあるだろうが，わたくしてきには，「論証」と言うと受動的な感じが想起され，「推論」と言うとわりと能動的な行為のように感じられるのだが，個人の感覚と感想は置いておこう．のちに演繹というものを考えるときに，「推論規則」という言葉が出てくるので（そしてそれはかなり能動的なニュアンスを含んでいると思う），そのときまで「推論」と言う単語はとっておこう．

前提 ＋ 結論

というように構造化できる，という事実は認めてよいだろう[*2]．日常語を使えば，＋ は「したがって」「それゆえ」などに置き換えられる．

前提 ＋ 結論 ＝ 前提，したがって，結論 ＝ 前提，それゆえ，結論

他にもよい語彙はあるかもしれないが，当面はこれですませる．

そして，前提や結論を命題を用いてあらわすことにすれば

論証 ＝ 前提とする命題 ＋ 結論とする命題

となる．ここで命題の真偽が論証という行為に作用するのではないか，という見通しが得られる．さらに，ここまで見てきたように，命題は論理式であらわされ，帰納的定義によって複合化される．そのうえで，論理結合子に意味をあたえることによって，論理式おのおのには T か F という真理値を割り当てることが可能であった．それらの作用の結果，命題の真偽が論理式の T と F によって区別されうることがわかった．さらに言えば，命題が論理式をつかって記号化され，各種の法則が適用できることもわかった．すなわち

論証 ＝ 前提とする論理式 ＋ 結論とする論理式

という形式に持ち込むことができることになる．

5.2.2 論証の妥当性の定義

さていま論証を

論証 ＝ 前提とする論理式 ＋ 結論とする論理式

という構造でまとめたのであった．このとき，「前提が真であれば，結論も真である」，ということをあたりまえとして認めたくなる．けれども，そこである具体的な例を持ち出して，「この具体例をつかうと，前提は真であるけど，結論は真にならない」ということが指摘されることもある．この具体例を「反例」とよぶ．反例は，結論は真にしないものなのである．それゆえに，妥当な論証というものを，「反例の存在しない論証」と定義することにする．これを $\mathsf{L}+M$ の世界で定義化すると次のようになる：

定義 5.1. 妥当な論証 (1)

前提をあらわす論理式 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ から結論をあらわす論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \mathcal{C}$ についての真偽値割り当て関数において，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ を同時に T にし，また同時に $\mathcal{C}$ を F とするようなもの（すなわち反例）は存在しない

この定義には，含むところがある[*3]．まず，真理値割り当て関数についての

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ を同時に T にし，また同時に $\mathcal{C}$ を F とするようなもの（すなわち反例）は存在しない

という説明であるが，これはある特定の真理値割り当て関数にだけ提供されるものではないということを諒解しておく必要がある．今，M と M' が $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ を同時に T とする異なる真理値割り当て関数であるとする．

[*2] おうおうにして，前提のない結論というものも世上にはあふれているが，それを示されるとなんとはなしの収まりの悪さを感じることがままあるのも事実ではないだろうか．「なんか，前提が省略されているな」，というような収まりの悪さが．それを「声の大きさ」で乗り切る行為は，感心できない．「空は青い」は前提なしの結論として扱われるだろうが，それとて，「この地球にいれば，空は青い」という前提が付くのであって，火星では空は青くない（はずだ）．文学って，この前提なしの結論をいかに納得させるか，というものなのではないか，と妄想したりもする...

[*3] 自分で書きながらこの言い方もなんだかなとは思うが，個人的にまごついた事柄であるので，それを忘れぬためにこのような書き方をした．切れ味鋭い方には無用の展開であろう．

そして，M は $\mathcal{C}$ を F としないが，M' は $\mathcal{C}$ を F とするものであったとする．このような M' が存在する場合は，妥当な論証とは見なさないのである．その含みが「$\cdots$ を同時に T にし，また同時に $\cdots$」という表現に隠されているのである．ここははっきりさせておいた方がよいだろう．言いかえれば

$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を充足する真理値割り当て関数すべてが，$\mathcal{C}$ を F としない（つまり，T とする）

となる．これを踏まえて再度定義を試みると

定義 5.2. 妥当な論証 (2)

前提をあらわす論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論をあらわす論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$，$\mathcal{C}$ について，$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を同時に T にする（充足する）*4すべての真理値割り当て関数が，同時に $\mathcal{C}$ を F とはしない

となる．これからは，この定義を軸としていくことにしよう．

論証の妥当性について，具体例を真理表とともにみてみる．

(1) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, したがって，$\mathcal{B}$

前提と結論に分けた論理式の真理表は

		前提		結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{B}$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

前提がすべて T のときの結論も T であるから，この論証は妥当である．

(2) $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$, したがって，$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$

前提と結論に分けた論理式の真理表は

			前提		結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F

前提がすべて T のときの結論で F になるものが（複数）存在している．つまり，反例をもつ真偽値割り当てがあるということだ．したがって，定義 5.2 (p.32) に照らし合わせると，この論証は妥当ではないということになる．

古代から妥当な論証であることが知られている次の４つのものについて，真理表でその妥当性を確認しておく．

*4 この「同時に T にする」ということのもうひとつの言い方は，$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n = T$ ということでもある．

- 肯定式（modus ponens）： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, したがって $\mathcal{B}$

		前提		結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

- 否定式（modus tollens）： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\neg\mathcal{B}$, したがって $\neg\mathcal{A}$

		前提		結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

- 選言三段論法: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\neg\mathcal{A}$, したがって $\mathcal{B}$

		前提		結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

- 仮言三段論法（推移律）： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, したがって $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$

			前提		結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

以上の結果からあきらかなように，前提がすべて真で結論が偽となるものは存在しない．それゆえ，この４つの論証はすべて妥当である，

5.2.3 矛盾からの導出

さてここで

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B},\ \mathcal{A},\ \text{したがって},\ \mathcal{C}$$

という論証を考えてみる．頼りにすべきものは真理表であるから，それを書いてみると

			前提			結論
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\neg B$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{C}$
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	F

となる．さて，これは妥当な論証なのだろうか？結論からいうと，妥当な論証である．

妥当な論証の定義は，前提の論理式をすべて $\mathcal{T}$ とし，同時に結論の論理式を $\mathcal{F}$ とする真理値割り当て関数が存在しないことであった．簡略化して言えば，反例が存在することであった．今の場合，この真理表からわかるように，前提がすべて $\mathcal{T}$ となるような場合がひとつもないのである．したがって，結論の論理式が $\mathcal{F}$ であっても，それは反例にはならない．なので，反例が存在しないという意味で，若干の無念さは残るが，この論証は妥当である，とするのである．

前提の論理式を集合であらわすと $\Gamma = \{\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B},\ \mathcal{A}\}$ である．真理表からもあきらかなように，Γ の各要素を同時に $\mathcal{T}$ にする真理値割り当てはないので，Γ は矛盾しているのである（充足不可能）．つまり，矛盾した前提の論理式の集合から導出される結論は，論証としては妥当である，ということになる．言いかえれば，矛盾した前提からはいかなる結論も導出可能なのである．「偽の前提から」ということではないことに注意．矛盾していることが必要なのである．

5.2.4　論証の妥当性と，トートロジー，論理的同値の間柄

論証の妥当性の定義から，いくつかの定理が導き出される．なお，これから文（文章）の言い換えを示す $\Leftrightarrow$ を重用するが，これを言語 $\mathbf{L}$ の論理結合子である $\leftrightarrow$ と混同してはいけないという釘を最初に刺しておく．

定理 5.1.

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

論理式 $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$ がトートロジーである

証明.

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を充足し，$\mathcal{C}$ を同時に $\mathcal{F}$ にする真理値割り当て関数は存在しない

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n = \mathcal{T}$ で $\mathcal{C}$ を同時に $\mathcal{F}$ にする真理値割り当て関数は存在しない（充足性を，$\wedge$ の働きを利用して書き換えた．脚注 *4 (p.32) でも述べた事柄）

$\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{F}$ にする真理値割り当て関数は存在しない[*5]

$\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$ はすべての真理値割り当て関数において $\mathcal{T}$ である

$\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$ はトートロジーである □

つぎの定理も成立する．

定理 5.2.

論理式 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が論理的に同値である．

$\Leftrightarrow$

前提が $\mathcal{A}$ で結論が $\mathcal{B}$ である論証と，前提が $\mathcal{B}$ で結論が $\mathcal{A}$ である論証のどちらもが妥当な論証である．

[*5] $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ が $\mathcal{F}$ になるのは，$\mathcal{P} = \mathcal{T}$ で $\mathcal{Q} = \mathcal{F}$ のときのみであることを思い出そう．

証明.

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ということは $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ がトートロジーということでもあった（定理 4.1 (p.24) より）．したがって

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ はトートロジーである

$\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \land (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ はトートロジーである

$\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ はトートロジーであり，そして，$(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ もトートロジーである

$\Leftrightarrow$

前提が $\mathcal{A}$ で結論が $\mathcal{B}$ である論証と，前提が $\mathcal{B}$ で結論が $\mathcal{A}$ である論証のどちらもが妥当な論証である（定理 5.1 (p.34) を適用）

□

5.3 論理的帰結（logical consequence）

前提をあらわす論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論をあらわす論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当であるとき，

- $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から $\mathcal{C}$ が出てくる（導ける，導かれる，導出できるなどなど）
- $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ の論理的帰結（logical consequence）である

というようなものの言い方がなされる．この論理的帰結という事柄を，あらたな記号をつかって

$$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{C}$$

と書くことにする[*6]．

この記号 $\models$ を使うことのメリットは，任意の論理式の集合 Γ にたいしても $\Gamma \models \mathcal{C}$ と記述できることにある．もちろん Γ が無限集合であってもよい．

5.3.1 論理的帰結の記法

記号 $\models$ の左側は集合であるとするのが望ましいのだが，簡便性から

$$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \models \mathcal{C}$$

という書き方も認めることにする．また，Γ に新な論理式 $\mathcal{B}$ を付け加えたものは，集合としては $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}$ と書くのが正式であるけれども，そこも

$$\Gamma \cup \{\mathcal{B}\} \models \mathcal{C} \Leftrightarrow \Gamma, \mathcal{B} \models \mathcal{C}$$

と書くことを許すことにする．そして，$\mathcal{B}$ という単一の論理式の追加ではなく，論理式の集合 Δ を追加する場合についても

$$\Gamma \cup \Delta \models \mathcal{C} \Leftrightarrow \Gamma, \Delta \models \mathcal{C}$$

と書くことを認めることにする．

さらに「$\Gamma \models \mathcal{C}$ ではない（$\mathcal{C}$ は論理的帰結ではない)」ということを

$$\Gamma \not\models \mathcal{C}$$

と書く．

[*6] 論理的帰結 $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{C}$ の $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ を axioms, postulates, premises ということもある．また，この論理的帰結から導出されるトートロジー $(\mathcal{A}_1 \land \mathcal{A}_2 \land \cdots \land \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$ を定理（theorem），$\mathcal{C}$ を定理の結論（conclusion）といったりもする．

▷ **トートロジー，矛盾命題の記法**

Γ が空集合のときにはどうなるか？形式的には

$$\varnothing \models \mathcal{C}$$

である．これは，前提となる論理式がひとつもなくても，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{F}$ とする真理値割り当て関数は存在しない，すなわちどんなときでも $\mathcal{C}$ は $\mathcal{T}$ となる，ということである．つまり，トートロジーと言う事柄が表現されていることになる．これを，空集合記号を省略して

$$\models \mathcal{C}$$

と言うようにも書く．これより，定理 5.1 (p.34) の内容は

$$\mathcal{C} \text{ が } \mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2,\ \cdots,\ \mathcal{A}_n \text{ の論理的帰結である} \quad \Leftrightarrow \quad \models (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$$

とあらわすことができる．

反対に，

$$\Gamma \models$$

はどうか．これは，$\Gamma \models \mathcal{C}$ において，その $\mathcal{C}$ 自体がないということを意味するものとする．つまり，Γ には論理的帰結がないのである．これは，前提となる Γ の論理式すべてを $\mathcal{T}$ とするものが存在しないということだ．したがって

- Γ は矛盾である
- Γ は充足不可能である

という事実が意味されるものとなるのである．*7．

5.3.1 (p.36) 節で見た妥当な論証の具体例をこの記法に当てはめておく：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \wedge \mathcal{B},\ \mathcal{A} \to \mathcal{B} \models \mathcal{B} \\
&\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{A} \to \mathcal{C} \models \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \\
&\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{A} \models \mathcal{B} \\
&\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B} \models \neg\mathcal{A} \\
&\mathcal{A} \vee \mathcal{B},\ \neg\mathcal{A} \models \neg\mathcal{B} \\
&\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \to \mathcal{C} \models \mathcal{A} \to \mathcal{C}
\end{aligned}$$

また，定理 5.2 (p.34) は次の様にあらわされる：

$$\mathcal{A} \ \equiv \ \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \mathcal{B} \text{ かつ } \mathcal{B} \models \mathcal{A}$$

5.3.2　論理的帰結と真理値割り当て関数（モデル）の関係

論理的帰結を，真理値割り当て関数 $\mathcal{M}$ を中心にして眺めてみる．

---

*7 矛盾している（充足不可能）な論理式の集合を $\Gamma_{\text{inconsistent}}$ とでも書けば

$$\Gamma \models \Leftrightarrow \Gamma_{\text{inconsistent}}$$

ということであると言えよう．また，5.2.3 (p.33) 節でみたように，矛盾からはいかなる論理式も導出できて，そしてそれはそれは妥当な論証なのであった．なので，$*$ を任意の論理式であるとすれば，$\Gamma_{\text{inconsistent}} \models *$ である．したがって，$\Gamma \models$ は Γ の矛盾性（充足不可能性）を示すもの，$\Gamma_{\text{inconsistent}} \models *$ は矛盾からはいかなる論理式も導出可能であることを示すもの，と整理しておくのが良いかもしれない．

論理式の集合 Γ のすべての要素 $\mathcal{P}$ について $M(\mathcal{P}) = T$ であるとき，「真理値割り当て関数 M は論理式の集合 Γ を充足する」「M は論理式の集合 Γ のモデルである」といって $M \models_m \Gamma$ または簡略化して $M(\Gamma) = T$ とかく．記号の同等性は

$$M \models_m \Gamma \iff M(\Gamma) = T$$

である．どちらを使い分けるかは，個人的には，かなり恣意的である．

そしてここでも，論理的帰結の簡便的表記と同様な簡便表記を採用する．$\Gamma = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\}$ のように要素が有限個であるとき

$$\begin{aligned} M \models_m \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\} &\iff M \models_m \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n \\ M(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\}) = T &\iff M(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n) = T \end{aligned}$$

などと書く．もちろん Γ のときと同様に

$$M \models_m \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\} \iff M(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\}) = T$$

である[*8].

ここで興味深い事実をひとつ．まず，M が $\Gamma = \{\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2,\ \cdots,\ \mathcal{P}_n\}$ を充足している，すなわち，$M \models_m \Gamma$ であるとしよう．したがって，$M(\mathcal{P}_i) = T$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となっている．さて，論理結合子 $\wedge$ を使うと，真理値割り当て関数の性質から $M(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2) = M(\mathcal{P}_1) \wedge M(\mathcal{P}_2)$ となるのであった．それゆえ

$$M(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) = M(\mathcal{P}_1) \wedge M(\mathcal{P}_2) \wedge \cdots \wedge M(\mathcal{P}_n) = T \wedge T \wedge \cdots \wedge T = T$$

となるから，M は $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n$ を充足する．すなわち

$$M \models_m \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n \ .$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} M \models_m \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\} &\iff M \models_m \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n \\ &\iff M \models_m \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n \end{aligned}$$

ということになる．

トートロジー $\mathcal{P}$ は，すべての真理値割り当て関数で T となるのであった．これは，真理値割り当て関数として特別なものは不要，言い換えれば，どのような真理値割り当て関数 M でも充足可能ということである．したがって，この表記法においても，トートロジーを $\models_m \mathcal{P}$ と書く．

論理式の集合が矛盾しているということは，それを T とする真理値割り当て関数 M は存在しないこと，つまり，充足可能ではないということであった．これを，「モデルを持たない，モデルがない」というように呼ぶ．

論理式の集合が矛盾していなければ，充足させることができる M は，少なくともひとつ（場合によっては複数）存在する（モデル M が少なくともひとつ存在する）．つまり，充足可能なのである．

トートロジーは，充足可能な場合の特別なものなのだ．

▷ $\models$ と $\models_m$ の間柄

M が Γ を充足する，あるいは，Γ はモデル M をもつ，ということを改めて記すと

$$M \models_m \Gamma \iff M(\Gamma) = T$$

[*8] 念のために．$\Gamma = \{\mathcal{P}\}$ であるとすると，次はすべて同じことを言っている：

$$M \models_m \Gamma \iff M \models_m \{\mathcal{P}\} \iff M \models_m \mathcal{P} \iff M(\{\mathcal{P}\}) = T \iff M(\mathcal{P}) = T$$

ということであった．このような真理値割り当て関数 M はひとつとは限るまい．したがって，Γ を充足する真理値割り当て関数 M をまとめた集合を，$\mathbb{M} = \{\, M_1, M_2, \ldots M_k \,\}$ とあらわすことにすると

$$M_i \models_m \Gamma \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

ということが成り立つはずである．そのもとで，$\mathcal{Q} \not\in \Gamma$ である論理式 $\mathcal{Q}$ を考える．このとき，すべての $M_i \in \mathbb{M}$ について $M_i(\mathcal{Q}) \neq F$ (i.e. $M_i(\mathcal{Q}) = T$) である場合を[*9]「$\mathcal{Q}$ は Γ の論理的帰結である」というのであり，それを $\Gamma \models \mathcal{Q}$ と書くのである．丁寧に記せば $i = 1, 2, \ldots, k$ のすべての i において

$$\Gamma \models \mathcal{Q} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} M_i \models_m \Gamma \\ M_i \models_m \mathcal{Q} \end{cases} \qquad (\text{for all } M_i \in \mathbb{M})$$

である．この $\mathbb{M}$ の要素すべてをいっぺんにあらわす簡便記号として M_* を利用することにする．

modus tollens $\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B} \models \neg\mathcal{A}$ の例をみてみよう．この場合は，$\Gamma = \{\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B}\}$ であり，$\mathcal{Q} = \neg\mathcal{A}$ である．真理値割り当て関数と真理表は

			前提		結論
M	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$
M_1	T	T	T	F	F
M_2	T	F	F	T	F
M_3	F	T	T	F	T
M_4	F	F	T	T	T

この表から，前提がすべて T になるのは M_4 のときのみであることがわかる．つまりこの場合は $\mathbb{M} = \{\, M_4 \,\}$．したがって Γ を充足するのは（モデルとして存在するのは）M_4 のみであり，そのとき

$$\begin{cases} M_4 \models_m \{\,\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B}\,\} \\ M_4 \models_m \neg\mathcal{A} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \{\,\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \neg\mathcal{B}\,\} \models \neg\mathcal{A}$$

となって，論理的帰結であることがわかる．

注意するべきことは，Γ を充足するすべての M_i が $\mathcal{Q}$ を充足しなければならないことである．$\mathcal{Q}$ を充足しない M_i がひとつでもあれば，論理的帰結とはいえない．$\mathcal{Q}$ が充足されない反例が存在するからである．この事実を，以前にみた $\{\,\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}\,\} \not\models \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ (p.32) で確認してみよう．この例においては，$\Gamma = \{\,\mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}\,\}$，$\mathcal{Q} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ であり，真理表に真理値割り当て関数を加えれば

				前提		結論
M	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$
M_1	T	T	T	T	T	T
M_2	T	T	F	T	F	F
M_3	T	F	T	F	T	F
M_4	T	F	F	F	F	F
M_5	F	T	T	T	T	T
M_6	F	T	F	T	T	F
M_7	F	F	T	T	T	F
M_8	F	F	F	T	T	F

となる．Γ を充足する真理値割り当て関数は M_1, M_5, M_6, M_7, M_8 の 5 個であるが，M_6, M_7, M_8 は $\mathcal{Q}$ を充足しない．つまり，Γ を充足するすべての真理値割り当て関数のうち，$\mathcal{Q}$ を充足しないものが存在しているのである．それゆえ，論理的帰結とはならない（論証は妥当ではない）ということがわかるのである．

[*9] これは $M_i \models_m \mathcal{Q}$ ということでもあることは先に見た（ような気がする）．

▷ **証明での利用**

各種定理の証明に，真理値関数 M と $\models_m$ をもちいると，証明の過程が見やすくなることがある．先にみた定理 5.1 (p.34)

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

論理式 $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{C}$ がトートロジーである

の証明に応用してみよう．

まず最初の言明

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

を記号化する．$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を同時に T にする，すなわち充足する真理値割り当て関数を M^T，そして複数存在するであろう M^T をまとめて M^T_* とする．このとき

$$\begin{aligned}
M^T_* \models_m \{\, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \,\} &\Leftrightarrow M^T_* \models_m \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \\
&\Leftrightarrow M^T_* \models_m \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n \\
&\Leftrightarrow M^T_*(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) = T \\
&\Leftrightarrow M^T_*(\mathcal{A}_i) = T \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\ .
\end{aligned}$$

そして同時に $\mathcal{C}$ を F とする真理値割り当て関数は存在しないのだから

$$M^T_*(\mathcal{C}) \neq F \;\Leftrightarrow\; M^T_*(\mathcal{C}) = T \;\Leftrightarrow\; M^T_* \models_m \mathcal{C}\ .$$

以上から，最初の言明は，$\{\, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \,\}$ が充足可能であるとき

$$M^T_*(\mathcal{A}_i) = T \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ であり } M^T_*(\mathcal{C}) = T \text{ である}$$

ということになる．ここで，真理値割り当て関数の性質と今求めてきた結果を使えば

$$\begin{aligned}
M^T_*((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{C}) &= M^T_*(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow M^T_*(\mathcal{C}) \\
&= T \rightarrow T = T
\end{aligned}$$

となる．

もう一方で，$\{\, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \,\}$ が充足可能でない，つまり矛盾しているときを考える．矛盾からの導出も，妥当な論証だからである．$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n$ を F とする真理割り当て関数 M^F が存在するとし，それらをまとめて M^F_* と記す．すると，$M^F_*(\mathcal{C})$ が T であろうと F であろうと

$$M^F_*((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{C}) = M^F_*(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow M^F_*(\mathcal{C}) = F \rightarrow M^F_*(\mathcal{C}) = T$$

となる．つまり，M^T_*，M^F_* どちらの真理値割り当てにおいても

$$\begin{aligned}
M^T_*((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{C}) = T \\
M^F_*((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{C}) = T
\end{aligned}$$

となるのである．すべての真理値割り当て関数は，M^T_* か M^F_* のどちらかの要素になるのだから，結局はすべての真理値割り当て関数 M_* に対して

$$M_*((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{C}) = T$$

である．これはトートロジーに他ならない．

どうだろうか？わかりやすくなっただろうか？

5.3.3 定理と用語と記号の間柄

ここまでの定理の結果と，用語，記号をまとめておく．以下は，すべて同じ事柄を語っているものである．

前提をあらわす論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論をあらわす論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である．

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ の論理的帰結である．

$\Leftrightarrow$

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{C}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M_* \models_m \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\} \\ M_* \models_m \mathcal{C} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M_*(\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}) = T \\ M_*(\mathcal{C}) = T \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

論理式 $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$ がトートロジーである．

$\Leftrightarrow$

$\models (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$

$\Leftrightarrow$

$\models_m (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{C}$

もちろん $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}$ として覚えておいてもいい．

5.4 さまざまな定理

演習をかねて，いくつかの定理の証明をおこなう．数をこなすと慣れてくるので，証明の丁寧さは，だんだんと薄れていくと思われる．

定理 5.3.

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

集合 $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\}$ は矛盾している

証明.

- [定義に忠実な文章でやる方法]

  前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を同時に T にし，$\mathcal{C}$ を同時に F にする真理値割り当て関数は存在しない

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を充足する真理値割り当て関数で $\mathcal{C}$ を F にするものはない

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を充足する真理値割り当て関数はすべて $\mathcal{C}$ を T にする

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$ を充足する真理値割り当て関数はすべて $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$，$\cdots$，$\mathcal{A}_n$, $\mathcal{C}$ を充足する

  $\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\cdots$, $\mathcal{A}_n$ を充足する真理値割り当て関数はすべて $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\cdots$, $\mathcal{A}_n$, $\neg\mathcal{C}$ を充足しない

$\Leftrightarrow$

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\}$ は矛盾である

- [$\models_m$ を使う方法]

  前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\cdots$, $\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

  $\Leftrightarrow$

  $M \models_m \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}$ で $\mathcal{C}$ を F にする M はない

  $\Leftrightarrow$

  $M \models_m \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}$ とするすべての真理値割り当て関数を M_* であらわせば

  $$M_* \models_m \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\} \text{ で } M_* \models_m \mathcal{C} \text{ である}$$

  $\Leftrightarrow$

  $M_* \models_m \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \mathcal{C}\}$ である

  $\Leftrightarrow$

  $M_* \not\models_m \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\}$ である

  $\Leftrightarrow$

  M_* は $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\}$ を充足しない

  $\Leftrightarrow$

  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\}$ は矛盾である

- [M だけで記述する方法]

  前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\cdots$, $\mathcal{A}_n$ から結論となる論理式 $\mathcal{C}$ を導く論証が妥当である

  $\Leftrightarrow$

  $M(\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}) = T$ で $M(\mathcal{C}) = F$ となる M はない

  $\Leftrightarrow$

  $M(\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}) = T$ で $M(\neg\mathcal{C}) = T$ となる M はない

  $\Leftrightarrow$

  $M(\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\})$ となる M はない

  $\Leftrightarrow$

  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg\mathcal{C}\}$ は矛盾である

$\square$

定理の証明をくどくどと手法別に記した．この後は，適宜適切と思われる手法にて記述していくことにする．

定理 5.4. 論理式 $\mathcal{A}$ がトートロジーである $\Leftrightarrow$ 集合 $\Gamma = \{\neg\mathcal{A}\}$ は矛盾している

証明.

論理式 $\mathcal{A}$ がトートロジーである

$\Leftrightarrow$

あらゆる真理値割り当て関数に対して $\mathcal{A}$ は T である

$\Leftrightarrow$

真理値割り当て関数すべてを M_* であらわせば，$M_*(\mathcal{A}) = T$ である

$\Leftrightarrow$

$M_*(\neg\mathcal{A}) = \neg M_*(\mathcal{A}) = F$

$\Leftrightarrow$

あらゆる真理値割り当て関数に対して $\neg\mathcal{A}$ は F である

$\Leftrightarrow$

$\{\neg\mathcal{A}\}$ は矛盾である □

定理 5.5.

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\cdots$, $\mathcal{A}_n$ から結論 F を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

集合 $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\}$ は矛盾している

証明.

前提となる論理式 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\cdots$, $\mathcal{A}_n$ から結論 F を導く論証が妥当である

$\Leftrightarrow$

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \neg F\}$ は矛盾している（定理 5.3 (p.40) を利用した）

$\Leftrightarrow$

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, T\}$ は矛盾している

$\Leftrightarrow$

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n,\}$ は矛盾している（T を取り除いても同じであることを利用した） □

ここから先の定理では，$\Gamma \models \mathcal{A}$ であるならば，という条件がつくものが多い．そのいっぽうで，先に「矛盾からの導出はすべて妥当である」ことをみたように，$\Gamma_{\text{inconsistent}}$ であるときは問答無用ですべての論理式が導出されるのであった．したがって，証明においてはその場合も記述するのが正確であろうとは思うが，自明なことでもあるので，特別に必要なときではない限り，$\Gamma_{\text{inconsistent}}$ の場合は省いて証明を記述することにする．

定理 5.6.

(1) $\mathcal{A} \models \mathcal{A}$

(2) $\Gamma \models \mathcal{A}$ であるならば，$\Gamma, \mathcal{B} \models \mathcal{A}$ （単調性 thinning）

(3) $\Gamma \models \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{B}$ であるならば，$\Gamma, \Delta \models \mathcal{B}$ （cutting）

証明.

(1) これはあきらかであるとしてよいだろう[*10]．

(2) 論理的帰結の定義から，$\Gamma \models \mathcal{A}$ ということは，Γ を充足するすべての真理値割り当て関数は，$\mathcal{A}$ を T とするということであった．
$\Gamma, \mathcal{B}$ を充足するすべての真理値割り当て関数を M_* とする．つまり $M_*(\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}) = T$．この充足性は，内容を分解すれば，$M_*(\Gamma)$ であり，かつ，$M_*(\mathcal{B}) = T$ ということである．つまり M_* は Γ を充足する．
最初に述べたように，Γ を充足するものは $\mathcal{A}$ を T にするのであったから，$M_*(\mathcal{A}) = T$．
まとめると，$M_*(\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}) = T$ であり，$M_*(\mathcal{A}) = T$ であるのだから，$\Gamma, \mathcal{B} \models \mathcal{A}$ となる．
この定理は，単調性（thinning）といわれる．

(3) まずストレートフォワードで行ってみる．
$\Gamma \models \mathcal{A}$ であるから，$M_*(\Gamma) = T$ を成り立たせる M_* は $M_*(\mathcal{A}) = T$ を導くことになる．また $\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{B}$ は，$M'_*(\{\mathcal{A}\} \cup \Delta) = T$ を成り立たせる M'_* は $M'_*(\mathcal{B}) = T$ を導くことを言ってい

*10 これを定理にする必要がありますかね，戸田山さん．

る．そして $M'_*(\{\mathcal{A}\} \cup \Delta) = T$ は，$M'_*(\mathcal{A}) = T$ でありかつ $M'_*(\Delta) = T$ である，というように分解できる．さてここで，$M_*(\mathcal{A}) = T$ と $M'_*(\mathcal{A})$ の関係はどうであるか？まず，$M'_*(\mathcal{A})$ については，$\mathcal{A}$ を充足しそのうえで Δ も充足する真理値割り当て関数の全体である．そして M_* は Γ を充足する真理値割り当て関数の全体であって，それが $\mathcal{A}$ も充足するということであった．となれば，M'_* の中に M_* が含まれているかもしれないし，その逆に M_* の中に M'_* が含まれているかもしれなく，$\mathcal{A}$ の真偽だけでは判断がつかない．このやりかただと相当な力技が必要かもしれないし，もしかしたら行き詰まってしまうかもしれない．

それゆえ，背理法を用いることをこころみる*11.

$\Gamma \models \mathcal{A}$, $\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{B}$ のときに $\Gamma, \Delta \not\models \mathcal{B}$ であると仮定する．$\Gamma, \Delta \not\models \mathcal{B}$ ということは，$\Gamma \cup \Delta$ を充足し，$\mathcal{B}$ を F とする真理値割り当て関数があるということだ．さていま，$\Gamma \models \mathcal{A}$ であるから，Γ を充足する真理値割り当て関数のもとでは $\mathcal{A}$ は F にはならない．また，$\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{B}$ であるから，$\mathcal{A}, \Delta$ を充足する真理値割り当て関数のもとでは，$\mathcal{B}$ は F にはならない．$\Gamma \models \mathcal{A}$ であるから $\mathcal{A}$ は F とはならないから，Δ が充足されれば $\mathcal{B}$ は F とならないことになる．つまり，Γ が充足され，かつ，Δ が充足されれば $\mathcal{B}$ は F にはならないということである．しかし先に $\mathcal{B}$ を F とする真理値割り当て関数があるという仮定をおいた．これは矛盾である．この結果，背理法の仮定 $\Gamma, \Delta \not\models \mathcal{B}$ が間違っていることがあきらかになる．それゆえ $\Gamma, \Delta \models \mathcal{B}$ なのである．

この定理は cutting とよばれる．論理的帰結が推移的であるという事実を拡張した定理である*12.

□

系 5.1. 定理 5.6 (p.42) の (3) の cutting の定理の応用

(1) $\Gamma \models \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A}, \Delta \models$ であるならば， $\Gamma, \Delta \models$

(2) $\models \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ であるならば， $\models \mathcal{B}$

証明.

(1) cutting 定理において，$\mathcal{B}$ を無くしたものである．やはり背理法をもちいる．
$\Gamma \models \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A}, \Delta \models$ であるときに $\Gamma, \Delta \not\models$ であると仮定する．
$\Gamma \models \mathcal{A}$ だから $M(\Gamma) = T$ で $M(\mathcal{A}) = F$ とする M はない．ゆえに $M(\mathcal{A}) = T$ である．
$\mathcal{A}, \Delta \models$ だから $\{\mathcal{A}\} \cup \Delta$ は矛盾である．したがって $M(\mathcal{A})$ か $M(\Delta)$ のどちらかは F である．
そして，上の結果から $M(\mathcal{A}) = T$ であるので，$M(\Delta) = F$ でなければならない．
一方で，$\Gamma, \Delta \not\models$ だから $\Gamma \cup \Delta$ は充足可能，ゆえに $M(\Gamma) = T$ であり，$M(\Delta) = T$ である．
となると，$M(\Delta)$ が T であり F でもあることになる．これは矛盾である．つまり，背理法の仮定が間違っている．それゆえ，$\Gamma \models \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A}, \Delta \models$ であるときには $\Gamma, \Delta \models$ となるのである．

(2) cutting 定理において，$\Gamma = \varnothing$, $\Delta = \varnothing$ としたものである．
$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ であるから，$M(\mathcal{A}) = M(\mathcal{B}) = T$ である．
$\models \mathcal{A}$ であるから，すべての真理値割り当て関数にたいして $\mathcal{A}$ は T すなわち $M_*(\mathcal{A}) = T$.
なので，$M_*(\mathcal{B}) = T$ であることになる．それゆえ，$\models \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ であるならば $\models \mathcal{B}$，となる*13.

□

*11 背理法の利点は，あるひとつの例が背理を満たしていることを導出できれば，全体が矛盾していると言えることにある．とくに，すべての場合を考慮して論証しなければならないようなときには，背理を成り立たせるようなひとつの例をみつけるほうが格段と易しいのだ．

*12 $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \mathcal{C}$ ならば $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$ の拡張版と捉えてもいいかもしれない．

定理 5.7.

(1) $\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \models \mathcal{B}$

(2) $\Gamma, \neg\mathcal{A} \models \Leftrightarrow \Gamma \models \mathcal{A}$

$\Gamma, \mathcal{A} \models \Leftrightarrow \Gamma \models \neg\mathcal{A}$

(3) $\Gamma \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \Gamma \models \mathcal{A}$ かつ $\Gamma \models \mathcal{B}$

(4) $\Gamma, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \models \Leftrightarrow \Gamma, \mathcal{A} \models$ かつ $\Gamma, \mathcal{B} \models$

(5) $\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B} \Leftrightarrow \Gamma \models \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

証明.

(1) 前提が矛盾であれば，論証は妥当であるということの表明である．$\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \models *$ と書いた方がよいかもしれない．

(2) 定理 5.3 (p.40) において，前提となる論理式の集合が無限集合である場合も考慮した証明にする（有限集合の場合は，そこですでに証明済みだ）．

$\Gamma \models \mathcal{A}$

$\Leftrightarrow$

$M(\Gamma) = T$ とし，同時に $M(\mathcal{A}) = F$ とする M は存在しない

$\Leftrightarrow$

$M \models_m \Gamma$ で $M(\mathcal{A}) = F$ とする M は存在しない

$\Leftrightarrow$

$M \models_m \Gamma$ で $M(\neg\mathcal{A}) = T$ とする M は存在しない

$\Leftrightarrow$

$M \models_m \Gamma \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ とする M は存在しない

$\Leftrightarrow$

$\Gamma \cup \{\neg\mathcal{A}\}$ は矛盾である

$\Leftrightarrow$

$\Gamma, \neg\mathcal{A} \models$

2つ目は，今の結果において $\mathcal{B} = \neg\mathcal{A}$ とすれば $\Gamma, \mathcal{B} \models \Leftrightarrow \Gamma \models \neg\mathcal{B}$ にて終了．

(3) $\Rightarrow$ 方向をまず示す．

Γ を充足する真理値割り当て関数すべてをまとめて M_* とすると，$\Gamma \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ということは，$M_* \models_m \Gamma$ であり，そのとき $M_*(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = F$ となる M は存在しない，ということである．したがって，$M_*(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = T$ であることになる．そして，$M_*(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = M_*(\mathcal{A}) \wedge M_*(\mathcal{B})$ であるから，$M_*(\mathcal{A}) = M_*(\mathcal{B}) = T$ でなければならないことにもなる．それゆえ，$\Gamma \models \mathcal{A}$ でありかつ $\Gamma \models \mathcal{B}$ である．

次に $\Leftarrow$ 方向．

これは，$\Rightarrow$ 方向の論理を裏返せばある意味自明である．つまり，Γ を充足する M_* について，$M_*(\mathcal{A}) = M_*(\mathcal{B}) = T$ であれば，$\Gamma \models \mathcal{A}$ であり $\Gamma \models \mathcal{B}$ であることになる．そのうえで $M_*(\mathcal{A}) \wedge M_*(\mathcal{B}) = M_*(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = T$ であるのだから，$\Gamma \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ である．

---

*13 戸田山 [3, p.70-71] は，この結果は「$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ であるならば（$\models \mathcal{A}$ ならば $\models \mathcal{B}$)」ということと同じであると言っている．この変形がどうしてこの時点で許されるのか，まだわたくしは理解していない．で，この変形された文言の意味は，「$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ であるのならば，もし $\mathcal{A}$ がトートロジーであったら $\mathcal{B}$ もトートロジーである」ということで，本文で書いたような証明を与えることができた．一方この逆，つまり「($\models \mathcal{A}$ ならば $\models \mathcal{B}$) であるならば $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ である」は成り立たない．なぜならば $M(\mathcal{A}) = F$ であっても，「ならば」の特性により，($\models \mathcal{A}$ ならば $\models \mathcal{B}$) は T である．しかしながら，$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ においては $M(\mathcal{A}) = F$ は許されない．なので，成立しないのである．

(4) $\mathcal{C} = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\Gamma, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \models \quad & \Leftrightarrow \quad \Gamma, \mathcal{C} \models \\
& \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \neg\mathcal{C} && ((2) \text{ を応用}) \\
& \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \\
& \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \neg\mathcal{A} \text{ かつ } \Gamma \models \neg\mathcal{B} && ((3) \text{ を応用}) \\
& \Leftrightarrow \quad \Gamma, \mathcal{A} \models \ \text{ かつ } \Gamma, \mathcal{B} \models && (\text{再び } (2) \text{ を応用})
\end{aligned}
$$

(5) $\Rightarrow$ 方向.

$\Gamma \cup \{ \mathcal{A} \}$ を充足する真理値割り当て関数すべてをまとめて M_* とすれば，$M_*(\Gamma) = T$ であり，かつ，$M_*(\mathcal{A}) = T$ ということになる．そして，$\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B}$ ということは，この M_* のもとで $M_*(\mathcal{B}) = T$ ということだ．それゆえ

$$M_*(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = M_*(\mathcal{A}) \to M_*(\mathcal{B}) = T \to T = T$$

という結果から，$\Gamma \cup \{ \mathcal{A} \}$ を充足するすべての真理値割り当て関数 M_* は $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を T にする．すなわち

$$\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \Gamma \models \mathcal{A} \to \mathcal{B} \ .$$

$\Leftarrow$ 方向.

Γ を充足するすべての真理値割り当て関数をまとめて M'_* とすると，$\Gamma \models \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は $M'_*(\Gamma) = T$ であり $M'_*(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = T$ ということを示している．このとき $M'_*(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = M'_*(\mathcal{A}) \to M'_*(\mathcal{B})$ であるから，

$$M'_*(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = T \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \text{(a) } M'_*(\mathcal{A}) = T \text{ かつ } M'_*(\mathcal{B}) = T \\ \text{(b) } M'_*(\mathcal{A}) = F \text{ かつ } M'_*(\mathcal{B}) = T, F \text{ どちらでもよい} \end{cases}$$

となる．(a) の場合には，$M'_*(\Gamma) = T$ であり $M'_*(\mathcal{A}) = T$ なのだから，$M(\{\Gamma \cup \{ \mathcal{A} \}\}) = T$ であり，そのとき $M'_*(\mathcal{B}) = T$ なのだから $\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B}$ ということになる．

(b) の場合には，$M'_*(\mathcal{A}) = F$ なのだから，$M(\Gamma \cup \{ \mathcal{A} \}) = F$ すなわち，$\Gamma \cup \{ \mathcal{A} \}$ は矛盾である．矛盾からはなんでも導出できるので，結局のところ $\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B}$ である．

以上から，$M(\mathcal{A})$ が T，F どちらでも $\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B}$ である．

□

定理 5.8.

(1) $\Gamma \models \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

(2) $\Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \quad \mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{C}, \quad \mathcal{B}, \Delta \models \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \Delta \models \mathcal{C}$

(3) $\mathcal{A}, \Gamma \models \mathcal{C}, \quad \mathcal{B}, \Gamma \models \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \models \mathcal{C}$

証明.

(1) $\Gamma \models \mathcal{A}$ であるということは，Γ を充足する真理値割り当て関数すべてが $\mathcal{A}$ を充足するということであった．したがって，その真理値割り当て関数すべてを M_* とあらわすことにすると，

$$\Gamma \models \mathcal{A} \ \Leftrightarrow \begin{cases} M_* \models_m \Gamma \\ M_* \models_m \mathcal{A} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} M_* \models_m \Gamma \\ M_*(\mathcal{A}) = T \end{cases}$$

である．

また $M_*(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = M_*(\mathcal{A}) \vee M_*(\mathcal{B})$ であるので，$M_*(\mathcal{B})$ が $\mathcal{B}$ に T, F どちらを割り当てようとも，$M_*(\mathcal{A}) = T$ なのだから $M_*(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = T$ である．すなわち，$\Gamma \models \mathcal{A}$ を満たす M_* は $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ を T にするのである．ゆえに，$\Gamma \models \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ となる．

(2) 簡便的に書かれた左辺の「$\Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{C}$, $\mathcal{B}, \Delta \models \mathcal{C}$」の意味合いは「$\Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ であり，かつ $\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{C}$ であり，そしてまた $\mathcal{B}, \Delta \models \mathcal{C}$ である」ということだということを諒解しておこう．

これだけ複雑であるので，やはり，背理法が適している．

(a) $\Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, (b) $\mathcal{A}, \Delta \models \mathcal{C}$, (c) $\mathcal{B}, \Delta \models \mathcal{C}$ と名前をつけておく．

そして，背理法の仮定として $\Gamma, \Delta \not\models \mathcal{C}$ であるとする．

$\Gamma, \Delta \not\models \mathcal{C}$ であるのだから，$\Gamma \cup \Delta$ を充足するけれども $\mathcal{C}$ を F とする真理値割り当て関数 M が存在することになる．つまり，$M(\Gamma) = T$ であり $M(\Delta) = T$ であって $M(\mathcal{C}) = F$ となる M が存在するのである．

さてここで (a) から $M'(\Gamma) = T$ で $M'(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = F$ とする真理値割り当て関数 M' は存在しないことがわかる．一方で，M は Γ を充足する（$M(\Gamma) = T$）としたのだから，今述べた結論により，この M を使えば $M(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = T$ であることになる．そして $M(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = T$ ということは，$M(\mathcal{A})$ または $M(\mathcal{B})$ のどちらかが T であるということになる（もちろん両方同時に T であってもかまわない）．

- $M(\mathcal{A}) = T$ の場合
  この M は, Δ を充足するものとして導入した真理値割り当て関数であった．したがって, $M(\mathcal{A}) = T$ であり, $M(\Delta) = T$ となるので, M は $\{\mathcal{A}\} \cup \Delta$ を充足する．それゆえ, (b) から $M(\mathcal{C}) = T$ となる．
- $M(\mathcal{B}) = T$ の場合
  上の議論と全く同様にして (c) から $M(\mathcal{C}) = T$ となる．

しかしながら，背理法の仮定において，$M(\mathcal{C}) = F$ としたのであった．これは矛盾している．ゆえに，背理法の仮定はまちがいであるから，$\Gamma, \Delta \models \mathcal{C}$ なのである．

(3) これもやはり，背理法が適している．論旨は (2) とほぼ同様である．

(a) $\mathcal{A}, \Gamma \models \mathcal{C}$, (b) $\mathcal{B}, \Gamma \models \mathcal{C}$ と名前をつけておく．

そして，背理法の仮定として $\Gamma, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \not\models \mathcal{C}$ であるとする．

$\Gamma, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \not\models \mathcal{C}$ であるのだから，$\Gamma \cup \{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\}$ を充足するけれども $\mathcal{C}$ を F とする真理値割り当て関数 M が存在することになる．つまり，$M(\Gamma) = T$ で $M(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = T$ であって $M(\mathcal{C}) = F$ となる M が存在するのである．さらにもうひとつブレークダンすれば，$M(\Gamma) = T$ で，$M(\mathcal{A}) = T$ かまたは $M(\mathcal{B}) = T$ であって，$M(\mathcal{C}) = F$ となる M が存在するのである．

場合分けを行おう．

- $M(\mathcal{A}) = T$ の場合
  (a) から $M'(\{\mathcal{A}\} \cup \Gamma) = T$ すなわち $M'(\mathcal{A}) = T$ かつ $M'(\Gamma) = T$ で，$M'(\mathcal{C}) = F$ とする真理値割り当て関数 M' は存在しないことがわかる．一方で，M は Γ と $\mathcal{A}$ を充足するとした．なので，$\mathcal{A}, \Gamma \models \mathcal{C}$ なのだから，この M を使えば $M(\mathcal{C}) = T$ であることになる．
- $M(\mathcal{B}) = T$ の場合
  上の議論と全く同様にして，(b) から $M''(\{\mathcal{B}\} \cup \Gamma) = T$ すなわち $M''(\mathcal{B}) = T$ かつ $M''(\Gamma) = T$ で，$M''(\mathcal{C}) = F$ とする真理値割り当て関数 M'' は存在しないことがわかる．一方で，M は Γ と $\mathcal{B}$ を充足するとした．なので，$\mathcal{B}, \Gamma \models \mathcal{C}$ なのだから，この M を使えば $M(\mathcal{C}) = T$ であることになる．

しかしながら，背理法の仮定において，$M(\mathcal{C}) = F$ としたのであった．これは矛盾している．ゆえに，背理法の仮定はまちがいであるから，$\Gamma, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \models \mathcal{C}$ なのである．

$\square$

5.5 場合分けと背理法の妥当性

5.5.1 場合分けの正当化

$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$ の論理的帰結であり，かつ，$\mathcal{B}$ の論理的帰結である場合を考える．妥当な論証をあらわす記号をつかえば，

$$\mathcal{A} \models \mathcal{C} \quad \text{であり，かつ} \quad \mathcal{B} \models \mathcal{C}$$

ということになる．ここで，定理 5.8 (p.45) の (3) を，$\Gamma = \varnothing$ として利用すると

$$\mathcal{A} \models \mathcal{C} \quad \text{であり，かつ} \quad \mathcal{B} \models \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \models \mathcal{C}$$

となる．

さていま，世界全体が A_1 と A_2 の論理式２つに分解しているとする．そして $A_1 \models C$ であり $A_2 \models C$ であるとする．そのときは，今見てきた様に

$$\mathcal{A}_1 \models \mathcal{C},\ \mathcal{A}_2 \models \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \models \mathcal{C}$$

となる．つまり，$\mathcal{A}_1$ によって $\mathcal{C}$ が帰結され，かつ，$\mathcal{A}_2$ によっても $\mathcal{C}$ が帰結されるのならば，全体 $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ によっても $\mathcal{C}$ が帰結されるということになる．n 個に分解しても同様である．これが，全体をいくつかの部分にわけ，その各々で妥当な検証により同じ $\mathcal{C}$ が帰結されるのであれば，全体としてもその $\mathcal{C}$ が帰結されるという，場合分けによる論証の正当化なのである．

論理式の恒真性を使うと，もうすこし詳しい形式で，場合分けの正当化が実感できる．実際

$$((\mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{A}_2 \to \mathcal{C})) \leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \mathcal{C}$$

はトートロジーであったから（名称は構成適両刀論法），もちろん

$$((\mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{A}_2 \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \mathcal{C})$$

もトートロジーである．そして $\models$ 記号をつかうと

$$\begin{gathered} \models ((\mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{A}_2 \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \mathcal{C}) \\ \Leftrightarrow \\ (\mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{A}_2 \to \mathcal{C}) \models (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \mathcal{C} \end{gathered}$$

となる．最後の結果の意味は

$\mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}$ が真で $\mathcal{A}_2 \to \mathcal{C}$ も真であるならば，$(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \mathcal{C}$ も真である

ということだ．これも場合分けの正当化に他ならないことが感じられると思う．

5.5.2 背理法（帰謬法）の眺め

背理法の骨格（1.3.4 (p.8) でまとめた）が，ここまでの命題論理でどの様な状況になっているかをみてみる．

(1)「C である」のパターン

$\neg\mathcal{C}$ を仮定して $\mathcal{D}$ と $\neg\mathcal{D}$ が見つかった場合には，どちらも妥当な論証であるとするのだから $\neg\mathcal{C} \models \mathcal{D}$ であり，かつ，$\neg\mathcal{C} \models \neg\mathcal{D}$ ということになる．いっぽうで

$$\begin{gathered} \neg\mathcal{C} \models \mathcal{D} \ \Leftrightarrow\ \models \neg\mathcal{C} \to \mathcal{D} \\ \neg\mathcal{C} \models \neg\mathcal{D} \ \Leftrightarrow\ \models \neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{D} \end{gathered}$$

である．右側の２つのトートロジーを $\wedge$ で結んだものもトートロジーになることはあきらかだから

$$\begin{aligned} &\models (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \wedge (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{D}) \\ \therefore\ &\models \neg\mathcal{C} \to (\mathcal{D} \wedge \neg\mathcal{D}) \\ \therefore\ &\quad \neg\mathcal{C} \models (\mathcal{D} \wedge \neg\mathcal{D}) \end{aligned}$$

となり，その結果右辺は矛盾であるであるから[*14] $\neg\mathcal{C}$ ではありえず，$\mathcal{C}$ である，という筋書きになる．

(2)「H であるとき C である」のパターン

妥当な論証であるならば $\mathcal{H} \models \mathcal{C}$．したがって $\mathcal{H}, \neg\mathcal{C} \models$ である[*15]．つまり，$\{\mathcal{H}, \neg\mathcal{C}\}$ は矛盾しているということになる．あとはその矛盾の具体例が出せればいい．

(3) これの説明は不要であろう．

(4)「H でありかつ I であるとき，C である」のパターン

妥当な論証であれば

$$\mathcal{H} \wedge \mathcal{I} \models \mathcal{C} \ \Leftrightarrow\ \models (\mathcal{H} \wedge \mathcal{I}) \to \mathcal{C}$$

である．同値変形を施して最右辺の計算をすすめていくと

$$\begin{aligned} (\mathcal{H} \wedge \mathcal{I}) \to \mathcal{C} \ &\equiv\ \neg(\mathcal{H} \wedge \mathcal{I}) \vee \mathcal{C} \\ &\equiv\ (\neg\mathcal{H} \vee \neg\mathcal{I}) \vee \mathcal{C} \\ &\equiv\ (\neg\mathcal{H} \vee \mathcal{C}) \vee \neg\mathcal{I} \\ &\equiv\ \neg(\mathcal{H} \wedge \neg\mathcal{C}) \vee \neg\mathcal{I} \\ &\equiv\ (\mathcal{H} \wedge \neg\mathcal{C}) \to \neg\mathcal{I} \end{aligned}$$

という形になる．ゆえに

$$\mathcal{H} \wedge \mathcal{I} \models \mathcal{C} \ \Leftrightarrow\ \models (\mathcal{H} \wedge \neg\mathcal{C}) \to \neg\mathcal{I} \ \Leftrightarrow\ (\mathcal{H} \wedge \neg\mathcal{C}) \models \neg\mathcal{I}$$

となる．これは，$\mathcal{H}$ かつ $\neg\mathcal{C}$ であれば $\mathcal{I}$ が成立しないということの表明である[*16]．そしてそもそも $\mathcal{I}$ なのであった．なので矛盾している，という論法である．

[*14] 途中で使った同値変形ははじめてかもしれないので，一応一般的な手順をかいてみると

$$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \ \equiv\ \neg\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \ \equiv\ (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \ \equiv\ (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \to \mathcal{R})\,.$$

[*15] 定理 5.3 (p.40) を利用．

[*16] 定理 4.3 (p.26) はこの論法を用いたひとつの例である．

第 6 章

論理結合子再考

論理結合子はどのようなものがいくつあれば良いのか，つまり，十全であるための最小構成はなになのか，を考える．

6.1 真理値割り当て関数と真理関数

6.1.1 真理値割り当て関数

原子命題についての T, F の割り当てと，真理値割り当て関数 M を，M の個数という観点から見直してみる．

ひとつの原子命題 p に対する真理値割り当てとは，p に命題定数 T か F のどちらかを割り当てることであった．そしてその割り当て行為を関数とみなしてきた．図式的に描けば，ひとつの原子命題に対する真理値割り当て関数は

$$M : p \longmapsto \{T, F\}$$

とあらわせる．そしてこの場合の真理値割り当て関数 M の個数は $2^1 = 2$ 個である．それを真理表で

	p
M_1	T
M_2	F

とあらわしてきた．

原子命題 2 個 p, q については

$$M : (p, q) \longmapsto \{T, F\}$$

となって．M の個数は $2^2 = 4$．そして真理表を

	p	q
M_1	T	T
M_2	T	F
M_3	F	T
M_4	F	F

とあらわしてきた．

つまり，T, F の割り当ての重複のないパターンそれぞれを真理値割り当て関数 M としてきたのである．ゆえに，異なる原子命題の個数が n 個であれば，真理値割り当てのパターンの数，すなわち，真理値割り当て関数の個数は，2^n 個となる．

このような真理値割り当て関数のもとで，論理結合子 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ の意味規則を与えて，論理結合子から生成される論理式（複合化された論理式）の真偽を，真理表を作成することによって，判定してきたのであった．

6.1.2 真理関数

今まで見てきた真理表は，つどつど考察の対象としている論理式を記し，それが真理値割り当て関数のもとでどのような値（つまり，T なのか F なのか）をとるかを問題にしてきた．ここで，一旦対象とする論理式の形式を離れ

て，真理値割り当てのパターンすなわち真理値割り当て関数各々に対して T, F を割り当てる関数 f を考える．これを真理関数とよぶ．関数の図式と関数の個数は，原子命題がひとつの場合（１変数真理関数）は

$$p \xmapsto{M} \{\,T, F\,\} \xmapsto{f} \{\,T, F\,\}, \qquad \begin{cases} M \text{ の個数} = 2^1 = 2 \\ f(p) \text{ の個数} = 2^2 = 4 \end{cases}$$

であり，２つの場合（２変数真理関数）は

$$(p, q) \xmapsto{M} \{\,T, F\,\}^2 \xmapsto{f} \{\,T, F\,\}, \qquad \begin{cases} M \text{ の個数} = 2^2 = 4 \\ f(p, q) \text{ の個数} = 2^4 = 16 \end{cases}$$

と表現できる．そのまま延長して，n 変数真理関数は

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \xmapsto{M} \{\,T, F\,\}^n \xmapsto{f} \{\,T, F\,\}, \qquad \begin{cases} M \text{ の個数} = 2^n \\ f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \text{ の個数} = 2^{2^n} \end{cases}$$

ということになる．$p, q, p_1, \ldots, p_n$ は T または F の値のみをとる．ブール代数的な考え方である．そして，$p, q, p_1, \ldots, p_n$ が T か F のどちらになるかは，M によって決まる．

真理関数は，すべての真理値のバリエーションを網羅している．この真理値のバリエーション各々は，どのような論理式で実現（表現）されるのだろうか．

ちなみに，あるひとつの真理関数が複数の論理式で実現されたとしても，真理値のパターンは同じなのであるから，それらの論理式が論理的に同値な関係にあることはあきらかである．

▷ １変数の真理関数

関数の図式は

$$p \xmapsto{M} \{\,T, F\,\} \xmapsto{f} \{\,T, F\,\}, \qquad \begin{cases} M \text{ の個数} = 2^1 = 2 \\ f(p) \text{ の個数} = 2^2 = 4 \end{cases}$$

であったから，この f の真理値のパターンを，真理値割り当て関数とともに表にしてみると

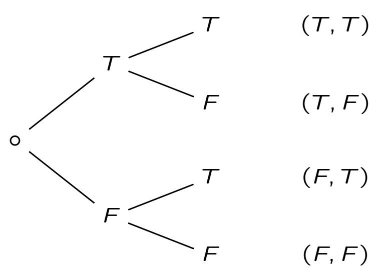
	p	f_1	f_2	f_3	f_4
M_1	T	T	T	F	F
M_2	F	T	F	T	F

となる[*1]．真理関数の働きをみるには，次のような図式の方がわかりやすいかもしれない：

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] p \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & f_1(p) \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & p \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & f_2(p) \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & p \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & f_3(p) \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & p \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & f_4(p) \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \\ T \arrow[r] & T & T \arrow[r] & T & T \arrow[dr] & T & T \arrow[dr] & F \\ F \arrow[ur] & F & F \arrow[r] & F & F \arrow[ur] & F & F \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

また，この表や図からもわかるように，f_3 を実現する（表現する）論理式のひとつに $\neg p$ がある．では，他はどうか？ f_1 は真理関数の値がすべて T なのであるから，p の真偽によらず T になる，つまりトートロジーである

*1 もれをなくすには，たとえば次のような樹形図をかいてみるといい．



論理式に対応する．たとえば $p \vee \neg p$ とか $p \to p$ とか．f_2 は p そのままでもよいし，$\neg\neg p$ や $\neg p \to p$ など．f_4 はトートロジーを否定するもの（矛盾式）であればなんでもよい．表にまとめてみると

$f_1(p)$	トートロジー，$p \vee \neg p$，$p \to p$，$\cdots$
$f_2(p)$	p，$p \wedge p$，$p \vee p$，$\neg p \to p$，$\cdots$
$f_3(p)$	$\neg p$，$\neg(p \wedge p)$，$\neg(p \vee p)$，$\neg(\neg p \to p)$，$\cdots$
$f_4(p)$	矛盾式，$\neg(p \vee \neg p)$，$p \wedge \neg p$，$\neg(p \to p)$，$\cdots$

このようにして，真理関数が論理結合子をもちいた論理式によって実現（表現）される．ただし，その表現はひと通りではない．ひとつの真理関数に対応する表現は複数存在するのである（それらはもちろん，論理的に同値である）．

▷ ２変数の真理関数

関数の図式は

$$(p,q) \xmapsto{M} \{T,F\}^2 \xmapsto{f} \{T,F\}, \qquad \begin{cases} M \text{ の個数} = 2^2 = 4 \\ f(p,q) \text{ の個数} = 2^4 = 16 \end{cases}$$

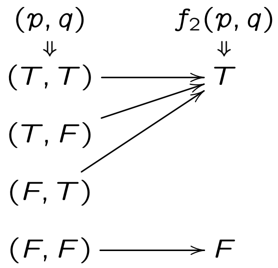
要素を個別に書くと

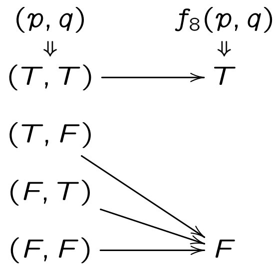
$$(p,q) \xmapsto{M} \begin{Bmatrix} (T,T) \\ (T,F) \\ (F,T) \\ (F,F) \end{Bmatrix} \xmapsto{f} \{T,F\}$$

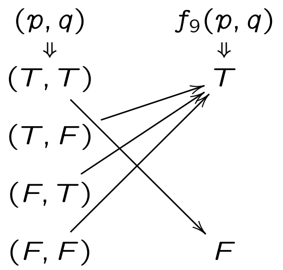
となる．この f の真理値のパターンと真理値割り当て関数とあわせて表にしてみれば

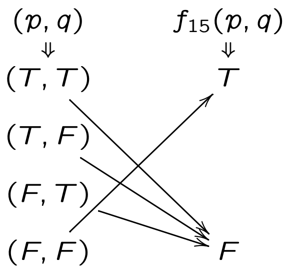
	p,q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
M_1	T,T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
M_2	T,F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
M_3	F,T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
M_4	F,F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

となる．２変数真理関数の働きの代表的なものは次のとおり：









真理関数それぞれを実現（表現）する論理式のおもなものを列挙しておこう：

$f_1(p,q)$	トートロジー	$f_9(p,q)$	$\neg(p \wedge q)$，$p \to \neg q$，$\cdots$
$f_2(p,q)$	$p \vee q$，$\neg p \to q$，$\cdots$	$f_{10}(p,q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$，$\cdots$
$f_3(p,q)$	$q \to p$，$\neg q \vee p$，$\cdots$	$f_{11}(p,q)$	$\neg q$，$\neg q \vee (p \wedge \neg p)$，$\cdots$
$f_4(p,q)$	p，$p \wedge (q \to q)$，$\cdots$	$f_{12}(p,q)$	$p \wedge \neg q$，$\neg(p \to q)$，$\cdots$
$f_5(p,q)$	$p \to q$，$\neg p \vee q$，$\cdots$	$f_{13}(p,q)$	$\neg p$，$\neg p \wedge (q \to q)$，$\cdots$
$f_6(p,q)$	q，$q \vee (p \wedge \neg p)$，$\cdots$	$f_{14}(p,q)$	$\neg p \wedge q$，$\neg(p \vee \neg q)$，$\cdots$
$f_7(p,q)$	$p \leftrightarrow q$，$(p \to q) \wedge (q \to p)$，$\cdots$	$f_{15}(p,q)$	$\neg(p \vee q)$，$\neg(\neg p \to q)$，$\cdots$
$f_8(p,q)$	$p \wedge q$，$\neg(p \to \neg q)$，$\cdots$	$f_{16}(p,q)$	矛盾式

▷ **真理関数と論理式の関係**

論理式 $\mathcal{P}$ が，異なる n 個の原子命題 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ から構成されているとしよう．n 変数真理関数 f の個数は 2^{2^n} 個であった．また，真理関数は，原子命題の真理値のパターンが全て異なるものとして分類されているものであった．なので，$\mathcal{P}$ の原子命題と論理結合子によるあらわされ方は，論理的に同値な論理式をまとめてひとつと勘定することにすれば（便宜上これを既約と呼ぼう），f の個数分存在することになる．

これを裏返して考えると，n 個の原子命題からなる論理式というものは，既約された形式では

$$\{T, F\}^n \xmapsto{f} \{T, F\}$$

の真理関数をあらわしているものであるということが言えることになる．

論理式は，何がしかの真理関数をあらわしているものとみなせるのである．

6.2 論理結合子の十全性

１変数真理関数，２変数真理関数それぞれについて，論理式での表現形式を見てきた．ここからは，真理関数を論理式であらわす際に最低限必要な論理結合子はどういうものか，ということを考えていく．

6.2.1 十全な論理結合子の組み合わせ

はじめに，重要な定理を紹介する．

定理 6.1. 表現定理（関数的完全性の定理）

$\neg, \wedge, \vee$ のみを論理結合子として含む論理式で，n 変数真理関数はすべて表現することができる．

また，論理式は真理関数をあらわしたものとみなせるのであったから，上の定理と同じことであるが

定理 6.2. 表現定理′

$\neg, \wedge, \vee$ のみを論理結合子として含む論理式で，すべての論理式を表現することができる．

この定理の証明に，第 7.1 (p.59) 節（リテラルと標準形）でみることになる標準形にまつわる定理の力を借りよう．定理 7.1 (p.60) ，7.2 (p.61) ，7.3 (p.61) から，すべての論理式は連言標準形（第 7.1 (p.59) 節参照）でも選言標準形（これも第 7.1 (p.59) 節参照）でもあらわすことができることが証明されている．そしてそれら標準形は $\neg$，$\wedge$，$\vee$ の３種類の論理結合子のみで構成される．それゆえ，表現定理′ が成立することがわかる．そして，n 変数真理関数もまた論理式で表現されるのであるから，表現定理が成り立つこともわかる．

この定理で述べている事柄を，「$\{\neg, \wedge, \vee\}$ は十全である（adequate)」という．すべての真理関数を表現することができる（すなわちすべての論理式を表現できる）論理結合子の集合を，十全であるというのである．

では，この３個の論理結合子すべてが必要なのだろうか？論理式の同値性から

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \equiv \neg(\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})$$

がなりたつ．これを利用して $\vee$ に出会ったらそれを $\neg$ と $\wedge$ であらわすように同値変形すれば，論理式から $\vee$ を取り除くことができる．したがって，表現定理に応用すれば，n 変数真理関数は，$\neg$ と $\wedge$ のみで表現できることになる．表現定理′ に応用すれば，すべての論理式は，$\neg$ と $\wedge$ のみで表現できることになる．つまり $\{\neg, \wedge\}$ で十全である．

同様にして

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \equiv \neg(\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q})$$

であるから，$\wedge$ は $\neg$ と $\vee$ によって同値変形をほどこすことにより取り除くことができる．すなわち，$\{\neg, \vee\}$ も十全である．

もうひとつ．

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \;\equiv\; \neg(\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q})$$
$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \;\equiv\; \neg\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$$

を利用すれば，$\wedge, \vee$ は $\neg$ と $\to$ によって取り除くことができる．つまり $\{\neg, \to\}$ も十全なのである．

しかしながら，十全とならない組み合わせもある．それにまつわる補題としてつぎのものがある．

補題 6.1． 2 項結合子 $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ のみを論理結合子として含む論理式は矛盾式になれない．

矛盾式（contradiction）とは，すべての真理値割り当て関数のにおいて論理式の値が F となるものであった．なので，「矛盾式を作れない」ということは「論理式の値が T になる真理値割り当て関数がひとつ以上ある」ということになる．戸田山教科書の証明を写経する．証明のために

論理式 $\mathcal{A}$ が Top one である $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ を構成する原子命題がすべて T のとき，$\mathcal{A}$ も T となる

という言葉を用意しておく．

証明．

(1) p, q を原子命題とする．$p = T$, $q = T$ のとき

$$p \wedge q = T, \quad p \vee q = T, \quad p \to q = T, \quad p \leftrightarrow q = T$$

であるから，$p \wedge q$，$p \vee q$，$p \to q$，$p \leftrightarrow q$ はすべて Top one である．

(2) $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ だけを含む論理式 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が Top one であると仮定する．すなわち，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を構成するすべての原子命題が T のとき，$\mathcal{A}$ も $\mathcal{B}$ も T となると仮定するのである．

(3) この仮定から，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を構成するすべての原子命題が T のであるならば

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = T, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B} = T, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{B} = T, \quad \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} = T$$

となる．つまり $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$，$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$，$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ はすべて Top one である．

(4) 以上より，$\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ だけを含む論理式は Top one である．

(5) したがって，論理式の値を T とする真理値割り当て関数が存在することが判明できた．つまり，矛盾式にはなりえないのである．

□

$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ だけを含む論理式は矛盾式を形成できないことがわかった．つまりこれらの論理記号だけでは，真理関数の矛盾式のところを表現するすべがないのである．したがって，十全とはなりえない．

$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ が十全ではないのだから，その部分集合である

$$\{\wedge, \vee, \to\}, \quad \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}, \quad \{\wedge, \to, \leftrightarrow\}, \quad \{\vee, \to, \leftrightarrow\},$$
$$\{\wedge, \vee\}, \quad \{\wedge, \to\}, \quad \{\wedge, \leftrightarrow\} \quad \{\vee, \to\}, \quad \{\vee, \leftrightarrow\}, \quad \{\to, \leftrightarrow\}$$

なども十全ではないことがわかる*2．

また，$\{\neg, \leftrightarrow\}$ も十全ではない．戸田山教科書流の証明方法はおもしろいし，そう簡単に思いつけるものでもない．これも補題としておく．

*2 「部分集合だから」という理由だけでよろしいか？

補題 6.2. $\{\neg, \leftrightarrow\}$ は十全ではない．

戸田山教科書の証明を写経する．まず

$\mathcal{P}$ が偶式である $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$ の真理表において，$\mathcal{P} = T$ となる行の数が偶数個である（0個も含む）．

という言葉を定義する．いっぽうで，論理式の真理表では

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T

であるから，$\mathcal{P} = \neg p$ や $\mathcal{P} = \neg q$, $\mathcal{P} = p \leftrightarrow q$ は偶式であり，$\mathcal{P} = p \wedge q$, $\mathcal{P} = p \vee q$ は偶式ではない，ということになる．証明においては，上の真理表をみればあきらかであるけれど，T の個数が偶数のものと奇数のものは，真理値が一致しない，ということを利用するのである．つまり，「偶式しか作れない記号からは，偶式でない論理式（奇式？）と論理的に同値な論理式は作れない」という事柄を利用する論法である．

証明.

(1) 原子命題 p, q については，その真理値割り当てのパターンは4種類で，そのうち $p = T$ となるのは2個であり，同様に $q = T$ となるのも2個であるから，偶式である（上の真理表の p, q の列を参照）[*3]．

(2) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を，2つの原子命題 p, q から $\neg$ と $\leftrightarrow$ のみを使って作られる論理式であり，かつ，偶式であると仮定する．

(3) $\neg\mathcal{A}$ は，$\mathcal{A}$ の真理値の T と F を入れ替えたものだから，やはり，偶式である．

(4) $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ の場合を考える．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は原子命題 p, q のみから作られるのだから，その真理値割り当てパターンは4通りである（上の真理表からもあきらかだ）．今，$\mathcal{A}$ の真理値が，4通りのパターンすべてにおいて T であるとする．これは $\mathcal{A}$ がトートロジーであることを意味している．すると

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \;\equiv\; T \leftrightarrow \mathcal{B} \;\equiv\; \mathcal{B}$$

となるから，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ の真理表は $\mathcal{B}$ と一致する．$\mathcal{B}$ は偶式と仮定したのだから，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ は偶式となる．

次に，$\mathcal{A}$ の真理値が，4通りのパターンすべてにおいて T でないとする（T となるものは0個）．これは $\mathcal{A}$ が矛盾式であることを意味している．したがって，

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \;\equiv\; F \leftrightarrow \mathcal{B} \;\equiv\; \neg\mathcal{B}$$

となるから[*4] $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ の真理表は $\neg\mathcal{B}$ と一致する．$\mathcal{B}$ は偶式と仮定したのだから，(3) より $\neg\mathcal{B}$ も偶式である．それゆえこの場合も $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ は偶式となる．

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を入れ替えて $\mathcal{B}$ 中心に考えても同様の結果が導けるので，T が4個の場合と 0 個の場合共に偶式となる．

[*3] ちょっとここ無理矢理感があるし，私的にはいまひとつ納得ができていない．

[*4]

$\mathcal{B}$	$F \to \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \to F$	$F \leftrightarrow \mathcal{B} (\equiv (F \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to F))$
T	T	F	F
F	T	T	T

$\mathcal{A},\mathcal{B}$ ともに2個の T を持つ場合を考える．その組み合わせを列挙してみると

(a)		(b)		(c)	
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
T	T	T	T	T	F
T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	T

という3通りしかない．(a) の場合は，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ は常に T，したがって4個の T を持つので偶式．(b) の場合は，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ が T になる場合は2個．(c) の場合は，$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ が T になる場合は0個．それゆえ，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ ともに2個の T を持つ場合も $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ は偶式となる．

(5) 以上より，2つの原子命題 p, q から $\neg$ と $\leftrightarrow$ のみを使って作られる論理式はすべて偶式である．

(6) したがって，偶式でない論理式は作れないので，十全ではないことが結論づけられる．

□

6.2.2 シェーファー関数

▷ シェーファー結合子 nand

原子命題 p, q について，$\neg(p \wedge q)$ と同じ真理値を与えるような真理関数を $p \uparrow q$ と書いて，nand とよぶ．not と and の組み合わせである．念のために真理表を書くと

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$p \uparrow q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

でありこの2つは論理的に同値，つまり，$p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$ である．この nand 記号 $\uparrow$ をもちいれば

$$\begin{aligned} \neg(p \uparrow q) &\equiv \neg\neg(p \wedge q) \equiv p \wedge q \\ \neg p \uparrow \neg q &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv p \vee q \end{aligned}$$

となって，$\wedge$ や $\vee$ は $\neg$ と $\uparrow$ であらわせることがわかる．そのうえ，

$$p \uparrow p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv \neg p \quad \therefore\ p \equiv \neg(p \uparrow p)$$

でもあるから

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv \neg(p \uparrow q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \\ p \vee q &\equiv \neg p \uparrow \neg q \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \end{aligned}$$

となって，$\neg$ も $\uparrow$ であらわすことができるようになる．つまり，nand 記号だけの論理結合子の集合 $\{\uparrow\}$ は十全なのである．これは驚きである．

▷ シェーファー結合子 nor

nand とほぼ同様なことを試みる[*5] $\neg(p \vee q)$ と同じ真理値を与えるような真理関数を $p \downarrow q$ と書いて，nor とよぶ．not と or の組み合わせである．真理表は

p	q	$\neg(p \vee q)$	$p \downarrow q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

[*5] $\wedge$ と $\vee$ の双対性のあらわれといったら言い過ぎだろうか？

でありこの２つは論理的に同値，つまり，$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$ である．ここから

$$\begin{aligned}
\neg(p \downarrow q) &\equiv \neg\neg(p \vee q) \equiv p \vee q \\
\neg p \downarrow \neg q &\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q \\
p \downarrow p &\equiv \neg(p \vee p) \equiv \neg p \quad \therefore \ p \equiv \neg(p \downarrow p)
\end{aligned}$$

であり，それゆえ

$$\begin{aligned}
p \vee q &\equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \\
p \wedge q &\equiv \neg p \downarrow \neg q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)
\end{aligned}$$

となって，nor 記号だけの論理結合子の集合 $\{\downarrow\}$ も十全なのである．これはまた驚きである．

▷ シェーファー関数

ただひとつだけの真理関数で十全となるもの[*6] をシェーファー関数という．$\{\uparrow\}$ は十全であった．したがって，$\uparrow$ はシェーファー関数である．それゆえ $\uparrow$ のみで，すべての論理式が表現できることになる．たとえば，

$$\begin{aligned}
p \wedge q \wedge r = (p \wedge q) \wedge r &= ((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)) \wedge r \\
&= (((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)) \uparrow r) \uparrow (((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)) \uparrow r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge r &= ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \wedge r \\
&= (((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow r) \uparrow (((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow r)
\end{aligned}$$

のように変形していけば良い．みてくれはそんなに美しくないけれど．

同様に $\downarrow$ もシェーファー関数である．

３変数真理関数，４変数真理関数，$\cdots$ と進んでいけば，そのおのおのについてシェーファー関数が存在することが知られている．その種類については，一般的なことはよくわからないが，２変数真理関数については，つぎの定理がある．

定理 6.3. ２変数真理関数のシェーファー関数は，nand $\uparrow$ と nor $\downarrow$ の２つのみである．

証明． 戸田山教科書の証明の写経である．

２変数の結合子 $*$ によってあらわされる真理関数がシェーファー関数であるためには次の条件が満たされねばならない．

(1) $\mathcal{A} = T, \mathcal{B} = T$ であるときには，$\mathcal{A} * \mathcal{B} = F$ でなければならない．もしかりに $\mathcal{A} * \mathcal{B} = T$ であるとすると，当然 $\mathcal{A} * \mathcal{A} = T$ となってしまい，$\mathcal{A}$ と $*$ から $\mathcal{A}$ の否定を作り出せない．しかし，$\mathcal{A} * \mathcal{B} = F$ であれば，$\mathcal{A} * \mathcal{A} = F$ となるから，$\mathcal{A} = T$ のときでも $\mathcal{A}$ と $*$ によって F を作り出すこと，つまり，$\mathcal{A}$ の否定をあらわすことができることになる．なので，$\mathcal{A} * \mathcal{B} = F$ であるときにのみ $*$ によって否定をあらわせることになる．

(2) $\mathcal{A} = F, \mathcal{B} = F$ であるときには，$\mathcal{A} * \mathcal{B} = T$ でなければならない．もしかりに $\mathcal{A} * \mathcal{B} = F$ であるとすると，$\mathcal{A} = F$ で $\mathcal{B} = F$ のときには決してトートロジーを作り出すことができないことになる（なぜなら T になりようがないから）．なので，トートロジーを作り出せるためには，$\mathcal{A} * \mathcal{B} = T$ でなければならない．

以上から，$*$ に対する真理表をかいてみると

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$
T	T	F
T	F	α
F	T	β
F	F	T

[*6] その真理関数ひとつだけで，他の真理関数すべてをあらわせる（生成できる）ということ．

となる．α, β の組み合わせは４通りある．

- $\alpha = T,\ \beta = T$ のとき

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

これは $\uparrow$ の真理値と同様である．

- $\alpha = T,\ \beta = F$ のとき

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	T

これは，$\neg\mathcal{B}$ の真理値である．したがって $\mathcal{A} * \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{B}$．それゆえ，この結合子は非対称になっていて

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{B}, \quad \mathcal{B} * \mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{A}$$

である，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ に置き換えると

$$\mathcal{A} * \mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{A}$$

となる．この結果を利用すると

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A} * \mathcal{B}) * \mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{B} * \mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{A} \\
&(\mathcal{A} * \mathcal{B}) * \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{B} * \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{B} \\
&\mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{A}) \equiv \mathcal{A} * \neg\mathcal{A} \equiv \neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \\
&\mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A} * \neg\mathcal{B} \equiv \neg\neg\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}
\end{aligned}$$

などのように，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ と $*$ のみの論理式は $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \neg\mathcal{A}, \neg\mathcal{B}$ のどれかと論理的に同値になってしまい，それ以外のものは作り出せないことがわかる．それゆえ，シェーファー関数にはなりえない．

- $\alpha = F,\ \beta = T$ のとき

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	T

これは，$\neg\mathcal{A}$ の真理値である．したがって $\mathcal{A} * \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A}$．上の論法とおなじで，これはシェーファー関数にはなりえない．

- $\alpha = F,\ \beta = F$ のとき

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

これは $\downarrow$ の真理値と同様である．

$\square$

3 変数真理関数についてのシェーファー関数のひとつとして，$\sharp pqr \equiv (p \vee q) \to \neg r$ というものがあげられる．このとき

$$\sharp ppr \;\equiv\; (p \vee p) \to \neg r \;\equiv\; p \to \neg r \;\equiv\; \neg p \vee \neg r \;\equiv\; \neg(p \wedge r) \;\equiv\; p \uparrow r$$

となる．$\uparrow$ を $\sharp$ であらわすことができるのである．$\{\uparrow\}$ は十全であったから，$\{\sharp\}$ も十全である．

第 7 章

その他的補遺

7.1　リテラルと標準形

リテラル（literal）というものを，「原子命題，および，原子命題の否定」と定義し，l と記す．

有限個のリテラルを $\vee$ で結んだ論理式

$$l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k$$

を，$\vee$ 節（disjunction of literals），と名付ける．そしてこの $\vee$ 節を $\wedge$ で結んだ論理式

$$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{C}_n \qquad (C_i \text{ は } \vee \text{ 節})$$

を，連言標準形または論理積標準形（conjunctive normal form）と呼ぶ．

また，有限個のリテラルを $\wedge$ で結んだ論理式

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_k$$

を，$\wedge$ 節（conjunction of literals），と名付け，この $\wedge$ 節を $\vee$ で結んだ論理式

$$\mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{D}_n \qquad (D_i \text{ は } \wedge \text{ 節})$$

を，選言標準形または論理和標準形（disjunctive normal form）と呼ぶ．

見てわかる通り，連言標準形と選言標準形は，$\vee$ と $\wedge$ を相互に入れ替えた関係にある．

これらの標準形は，先に導入した $\bigwedge$ と $\bigvee$ をもちいてあらわすこともできる．連言標準形は，リテラルの添字を工夫すれば

$$(l_{11} \vee l_{12} \vee \cdots \vee l_{1k_1}) \wedge (l_{21} \vee l_{22} \vee \cdots \vee l_{2k_2}) \wedge \cdots \wedge (l_{n1} \vee l_{n2} \vee \cdots \vee l_{nk_n}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{k_i} l_{ij}$$

$$\left(C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee \cdots \vee l_{ik_i} = \bigvee_{j=1}^{k_i} l_{ij} \text{ ということ} \right)$$

とあらわせ，選言標準形は

$$(l_{11} \wedge l_{12} \wedge \cdots \wedge l_{1k_1}) \vee (l_{21} \wedge l_{22} \wedge \cdots \wedge l_{2k_2}) \vee \cdots \vee (l_{n1} \wedge l_{n2} \wedge \cdots \wedge l_{nk_n}) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} l_{ij}$$

$$\left(D_i = l_{i1} \wedge l_{i2} \wedge \cdots \wedge l_{ik_i} = \bigwedge_{j=1}^{k_i} l_{ij} \text{ ということ} \right)$$

と表記できる．

この事実を尊重するために，少し身勝手な変形を施すときがある．標準形として捉えたいときには，論理的同値関係を利用して

$$p \ \equiv \ p \wedge T \ \equiv \ p \vee F$$

と変形するのである[*1]．そこから

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge T$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F$$

とみなすことによって，連言標準形と選言標準形の両方の表現が得られるとするのである．

以上の事柄から，すべての論理式は上記の 2 つの標準形であらわせることになる．また，おのおのの標準形全体の否定であらわすこともできる[*2]．定理として証明しておく．

定理 7.1. すべての論理式は連言標準形であらわすことができる．

証明. 構造的帰納法をもちいる．

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 各々が連言標準形であらわされていると仮定しよう．つまり

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n$$
$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Q}_m$$

として，各 $\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_j$ はすべて $\vee$ 節であると仮定するのである．

(1) $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ の場合

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が連言標準形であるのだから，$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ も連言標準形であることはあきらかである．心配ならば，次のように書き下して確認すれば良い：

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} &= (\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) \wedge (\mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Q}_m)\\ &= \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n \wedge \mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Q}_m\end{aligned}$$

（$\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_j$ はすべて $\vee$ 節なのだから，これは連言標準形に他ならない．）

(2) $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ の場合

分配法則を使うと，

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} &= (\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) \vee \mathcal{Q}\\ &= (\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P}_2 \vee \mathcal{Q}) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{P}_n \vee \mathcal{Q}) .\end{aligned}$$

そして $\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}$ の $\mathcal{Q}$ を分解して再度分配法則を使えば

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q} &= \mathcal{P}_i \vee (\mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Q}_m)\\ &= (\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}_1) \wedge (\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}_2) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}_m)\end{aligned}$$

となる．$\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_j$ はすべて $\vee$ 節なのだから，$\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}_j$ も $\vee$ 節．したがって，$\mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}$ は連言標準形．ここで最初の式にもどって $\mathcal{R}_i := \mathcal{P}_i \vee \mathcal{Q}$ とおきかえると

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} &= (\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P}_2 \vee \mathcal{Q}) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{P}_n \vee \mathcal{Q})\\ &= \mathcal{R}_i \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{R}_n\end{aligned}$$

であり，(1) の結果を利用すれば，この $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ も連言標準形であることがわかる．

(3) $\neg\mathcal{P}$ の場合

ここだけ，リテラルに立ち戻り，かつ，数学的帰納法を使う．

l をリテラルとする．$\mathcal{P}_i$ はリテラルのみで生成される $\vee$ 節としたのであったから，

$$\mathcal{P}_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee \cdots \vee l_{il}$$

という形式であらわされる．

[*1] $0! = 1$ と決めることと似たようなものである．
[*2] 表現定理 6.1 (p.52) の別の角度からの眺めである．

(a) $n = 1$ のとき

$\mathcal{P}_1 = l_{11} \lor l_{12} \lor \cdots \lor l_{1l}$ であるから

$$\begin{aligned}\neg\mathcal{P}_1 &= \neg(l_{11} \lor l_{12} \lor \cdots \lor l_{1l}) \\ &= \neg l_{11} \land \neg l_{12} \land \cdots \land \neg l_{1l}\end{aligned}$$

となり，これは連言標準形に他ならない．

(b) $n = 2$ のとき

$\mathcal{P}_2$ を，$\mathcal{P}_1$ ど同様リテラルからのみ生成される $\lor$ 節とすれば，(a) と同様に $\neg\mathcal{P}_2$ も連言標準形である．そして $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \land \mathcal{P}_2$ とすれば

$$\neg\mathcal{P} = \neg(\mathcal{P}_1 \land \mathcal{P}_2) = \neg\mathcal{P}_1 \lor \neg\mathcal{P}_2$$

となり，(2) にて連言標準形と連言標準形を $\lor$ で結合したものは連言標準形であることが示されているので，これもまた連言標準形である．

(c) $n = k$ で成り立つと仮定して $n = k + 1$ のとき

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \land \mathcal{P}_2 \land \cdots \land \mathcal{P}_k \land \mathcal{P}_{k+1}$ とすれば

$$\begin{aligned}\neg\mathcal{P} &= \neg(\mathcal{P}_1 \land \mathcal{P}_2 \land \cdots \land \mathcal{P}_k \land \mathcal{P}_{k+1}) \\ &= \neg(\mathcal{P}_1 \land \mathcal{P}_2 \land \cdots \land \mathcal{P}_k) \lor \neg\mathcal{P}_{k+1}\end{aligned}$$

となる．$n = k$ までで成り立つと仮定したのだから，$\neg(\mathcal{P}_1 \land \mathcal{P}_2 \land \cdots \land \mathcal{P}_k)$ は連言標準形である．また $\mathcal{P}_{k+1}$ はリテラルからのみ生成される単独の $\lor$ 節だから，これも連言標準形である ((a) を利用)．したがって (2) でみたように，連言標準形と連言標準形を $\lor$ で結合したものは連言標準形である

以上から，数学的帰納法によって，$\neg\mathcal{P}$ は標準連言形であることが示されたことになる．

(4) $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ の場合

$\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \equiv \neg\mathcal{P} \lor \mathcal{Q}$ である．(3) から $\neg\mathcal{P}$ は連言標準形であり，また (2) にて連言標準形と連言標準形を $\lor$ で結合したものは連言標準形であることが示されているので，これもまた連言標準形である．

(5) $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ の場合

$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \equiv (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \land (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})$ である．(4) から $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ はともに連言標準形である．また (1) から連言標準形と連言標準形を $\land$ で結合したものは連言標準形であることがわかっているので，これもまた連言標準形である．

□

定理 7.2. すべての論理式は選言標準形であらわすことができる．

証明. 定理 7.1 (p.60) の証明において，$\land$ と $\lor$ を同時にそっくり入れ替えれば証明できる． □

定理 7.3. すべての論理式は，選言標準形の否定であらわすことができるし，連言標準形の否定でもあらわすことができる．

証明. $\lor$ 節や $\land$ 節が 2 個の場合のみを考える[*3]．

C_1, C_2 を $\lor$ 節であるとする．$\mathcal{P} = C_1 \land C_2$ という連言標準形であらわされている $\mathcal{P}$ に対して

$$\mathcal{P} = \neg\neg\mathcal{P} = \neg\neg(C_1 \land C_2) = \neg(\neg C_1 \lor \neg C_2)$$

[*3] 正式な証明としたい場合には，この結果をもとに数学的帰納法に持ち込めばいいだろう．

という同値変形が可能である．ここで $\vee$ 節である C_1 をリテラルであらわせば

$$\neg C_1 = \neg(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k) = \neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge \cdots \wedge \neg l_k$$

であり, これは $\wedge$ 節に他ならない．$\neg C_2$ も同様にして $\wedge$ 節である．したがって, $D_1 := \neg C_1$，$D_2 := \neg C_2$ と置き換えて見やすくすれば

$$\mathcal{P} = \neg\neg\mathcal{P} = \neg(D_1 \vee D_2)$$

となる．すなわち，選言標準形の否定であらわすこともできるのである．

連言標準形の否定であらわすことも可能であることは，上の論旨において $\wedge$ と $\vee$ を同時に置き換えればよい（はずである）． □

7.1.1 連言形への変換のアルゴリズム

標準形への変形の前に再度諒解しておくべきことは，論理式の帰納的定義より，一般の命題は原子命題と論理結合子のみでの表現に分解できるということである．したがって，まず一般的な命題を原子命題のレベルにまで分解しておき，そのうえで次のアルゴリズムのもとで変形を進めていけば良い．その際には，部分論理式の適切な選択とそれの同値変形をもって実践する．

1. 次の 2 つの同値変形を利用して $\leftrightarrow$ と $\rightarrow$ を書き換える

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \end{aligned}$$

2. 次の同値変形を使って $\neg$ を可能な限り消去する

$$\neg\neg p \equiv p$$

3. 次のド・モルガンの法則を使って，括弧をなくす

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

4. 次の分配法則を使って，標準形の形にする

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

実例で確かめてみよう：

$$\begin{aligned} (p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow s &\equiv (p \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow s \\ &\equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee s \\ &\equiv (\neg p \vee \neg(\neg q \vee r))) \vee s \\ &\equiv (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee s \\ &\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s \end{aligned}$$

ここで $D = (q \wedge \neg r)$ とすればこれは $\wedge$ 節であるので

$$\equiv (\neg p \vee D) \vee s \equiv \neg p \vee D \vee s$$

となって選言標準形になっている．戻って変形を続ければ

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee s \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \vee s) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \vee s) \\ &\equiv (\neg p \vee q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \end{aligned}$$

となって最終結果は，連言標準形になっている．

7.1.2　連言標準形とトートロジー

連言標準形であらわされた論理式においては，トートロジーであるかどうかの判定が半ば機械的に行える．$\mathcal{P} = \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{C}_n$（$\mathcal{C}_i$ は $\vee$ 節）であるとして，

(1) $\mathcal{C}_m$ の中に $l \vee l$（l はリテラル）があれば $l \vee l \equiv l$ をつかって l に置き換える
(2) $\mathcal{C}_m$ の中に $p \vee \neg p$（p は原子命題）があれば $p \vee \neg p \equiv T$ をつかって T に置き換える
(3) その結果，$\mathcal{C}_m$ が T だけになれば，$\mathcal{P}$ の $\mathcal{C}_m$ を T にする

という操作を繰り返す．(1)，(2) から $\mathcal{C}_m$ の中の $p \vee p, \neg p \vee \neg p, p \vee \neg p$ が除去される．(3) によって全ての $\mathcal{C}_m$ が T になれば，それはトートロジーである．

いっぽうで，(3) とならないときの $\mathcal{C}_m$ は，$\mathcal{C}_m = l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k$ という形をしているはずであり，かつ，(1)，(2) の操作の結果であるので $l_i \neq l_j$ である（さらに付け加えれば，l_i はリテラルであるから，l_i の中に論理結合子は含まれていない）．このような $\mathcal{C}_m$ にたいしては $\mathcal{C}_m = F$ となる真理値割り当てが必ず存在する．したがって $\mathcal{P}$ はトートロジーにはなりえない．つまり，そのような $\mathcal{C}_m$ が残れば $\mathcal{P}$ はトートロジーではない，という判定ができるのである．

modus tollens で確認してみると

$$
\begin{aligned}
(\neg p_2 \wedge (p_1 \to p_2)) \to \neg p_1 &\equiv (\neg p_2 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)) \to \neg p_1 \\
&\equiv \neg(\neg p_2 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)) \vee \neg p_1 \\
&\equiv (\neg\neg p_2 \vee \neg(\neg p_1 \vee p_2)) \vee \neg p_1 \\
&\equiv (p_2 \vee (p_1 \wedge \neg p_2)) \vee \neg p_1 \\
&\equiv ((p_2 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_2)) \vee \neg p_1 \\
&\equiv ((p_2 \vee p_1) \vee \neg p_1) \wedge ((p_2 \vee \neg p_2) \vee \neg p_1) \\
&\equiv (p_2 \vee (p_1 \vee \neg p_1)) \wedge ((p_2 \vee \neg p_2) \vee \neg p_1) \\
&\equiv (p_2 \vee T) \wedge (T \vee \neg p_1) \\
&\equiv T \wedge T \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

となる．すなわち $\models (\neg p_2 \wedge (p_1 \to p_2)) \to \neg p_1$ ．

トートロジーにならない一番単純な例は，$C_1 \wedge C_2 = (p_1 \vee p_2) \wedge T$ という連言標準形である．残っている $\vee$ 節 $C_1 = p_1 \vee p_2$ を F にする真理値割り当てが必ず存在するので，トートロジーにはなりえないのである．

7.1.3　選言標準形と充足可能性

選言標準形であらわされた論理式においては，充足可能性の判定を半ば機械的に行うことができる．$\mathcal{P} = \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{D}_n$（$\mathcal{D}_i$ は $\wedge$ 節）であるとして，

(1) $\mathcal{D}_m$ の中に $l \wedge l$ があれば $l \wedge l \equiv l$ をつかって l に置き換える
(2) $\mathcal{D}_m$ の中に $p \wedge \neg p$ があれば $p \wedge \neg p \equiv F$ をつかって F に置き換える
(3) その結果，$\mathcal{D}_m$ が F だけになれば，$\mathcal{P}$ の $\mathcal{D}_m$ を F にする

という操作を繰り返す．(1)，(2) から $\mathcal{D}_m$ の中の $p \vee p, \neg p \vee \neg p, p \vee \neg p$ が除去される．(3) によって全ての $\mathcal{D}_m$ が F となれば，$\mathcal{P}$ は充足不可能であることになる．

いっぽうで，(3) とならないときの $\mathcal{D}_m$ は，$\mathcal{D}_m = l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_k$ という形をしているはずであり，かつ，(1)，(2) の操作の結果であるので $l_i \neq l_j$ である．このような $\mathcal{D}_m$ にたいしては $\mathcal{D}_m = T$ となる真理値割り当てが必ず存在する．つまり，F に帰着しない $\mathcal{D}_m$ のそれぞれについて $\mathcal{D}_m = T$ となる真理割り当てが存在するのだから，そのどれかを選ぶだけで充足可能になる．もちろん複数選んでも構わない．それだけ，充足可能性の候補が存在するのである．以上から，$\mathcal{P}$ が充足可能であることが

例を見てみよう．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} =&((p \land q) \to \neg r) \land (\neg p \to (q \lor r)) \\
&\equiv (\neg(p \land q) \lor \neg r) \land (\neg\neg p \lor (q \lor r)) \\
&\equiv (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (p \lor q \lor r)
\end{aligned}
$$

一旦 $\mathcal{Q} = (p \lor q \lor r)$ として

$$
\begin{aligned}
&\equiv (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land \mathcal{Q} \\
&\equiv (\neg p \land \mathcal{Q}) \lor (\neg q \land \mathcal{Q}) \lor (\neg r \land \mathcal{Q})
\end{aligned}
$$

$(\neg p \land \mathcal{Q}) \equiv \neg p \land (p \lor q \lor r) \equiv (\neg p \land p) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land r)$ を使って

$$
\begin{aligned}
\equiv\ & ((\neg p \land p) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land r)) \\
& \qquad \lor \\
& ((\neg q \land p) \lor (\neg q \land q) \lor (\neg q \land r)) \\
& \qquad \lor \\
& ((\neg r \land p) \lor (\neg r \land q) \lor (\neg r \land r)) \\
\equiv\ & (F \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land r)) \\
& \qquad \lor \\
& ((\neg q \land p) \lor F \lor (\neg q \land r)) \\
& \qquad \lor \\
& ((\neg r \land p) \lor (\neg r \land q) \lor F) \\
\equiv\ & (\neg p \land q) \lor (\neg p \land r) \lor (\neg q \land p) \lor (\neg q \land r) \lor (\neg r \land p) \lor (\neg r \land q)
\end{aligned}
$$

となるので，すくなくとも $(\cdots)$ のどれかひとつが T になれば全体は T となる．真理値割り当て関数を M とあらわして列挙すると

1. $M(p) = F, \quad M(q) = T, \quad M(r) = T, F$ どちらでもよい
2. $M(p) = F, \quad M(r) = T, \quad M(q) = T, F$ どちらでもよい
3. $M(q) = F, \quad M(p) = T, \quad M(r) = T, F$ どちらでもよい
4. $M(q) = F, \quad M(r) = T, \quad M(p) = T, F$ どちらでもよい
5. $M(r) = F, \quad M(p) = T, \quad M(q) = T, F$ どちらでもよい
6. $M(r) = F, \quad M(q) = T, \quad M(p) = T, F$ どちらでもよい

となる[*4]．

ただこれは，実際にやってみてわかることでもあるが，そう効率の良い方法ではない．今の場合，変形の途中であらわれた $\mathcal{P} \equiv (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (p \lor q \lor r)$ で真理表を書いてみると

p	q	r	$\mathcal{R} = \neg p \lor \neg q \lor \neg r$	$\mathcal{Q} = p \land q \land r$	$\mathcal{P} = \mathcal{R} \land \mathcal{Q}$
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

であり，この方が効率が良いと思われる．

[*4] さらにこれを整理すれば，$\mathrm{M}[p] = \mathrm{M}[q] = \mathrm{M}[r] = T$ でなくそして $\mathrm{M}[p] = \mathrm{M}[q] = \mathrm{M}[r] = F$ でもない M を採用すればよいということになっている．

7.2 双対性定理

論理式の双対関係というものを考える[*5]

論理式は，原子命題と $\wedge, \vee, \neg$ という論理演算子のみで構成することが可能であるから，ここからはすべての論理式がこの原子命題と 3 個の論理演算子で書き表されていいるものとする．

7.2.1 原子命題の置き換え

論理式 $\mathcal{P}$ の中にある原子命題 p を別の原子命題 q に置き換えることとを $\mathcal{P}\left[q/p\right]$ と書く．複数の原子命題があるときは，それぞれについて書く．すなわち，

$$\text{（原子命題の置き換え）} = \mathcal{P}\left[q_1/p_1, q_2/p_2, \ldots, q_n/p_n\right] .$$

このように書いた場合に，もし $\mathcal{P}$ が q_i を含んでいないときにはその置換を無視するという約束にする．その結果，置換を書く際に，論理式が特定の原子命題を含んでいるかどうかを気にしなくて済むことになる．

7.2.2 双対論理式

論理式 $\mathcal{P}$ の双対論理式とよばれるものを $\mathcal{P}^d$ とあらわして，

$$\mathcal{P}^d = \mathcal{P} \text{ の中の } \wedge \text{ を } \vee \text{ に置き換え，同時に } \vee \text{ を } \wedge \text{ に置き換えたもの}$$

と定義する．たとえば

$$\mathcal{P} = (\neg(p_1 \wedge p_2) \vee \neg(p_3 \wedge p_4)) \wedge (p_1 \vee p_3) \tag{7.1}$$

であるならば

$$\mathcal{P}^d = (\neg(p_1 \vee p_2) \wedge \neg(p_3 \vee p_4)) \vee (p_1 \wedge p_3) \tag{7.2}$$

となる．このことから，$\mathcal{P}$ が連言標準形であれば，$\mathcal{P}^d$ は選言標準形になることはあきらか．そしてその逆，つまり，$\mathcal{P}$ が選言標準形であれば，$\mathcal{P}^d$ は連言標準形になることもあきらかである．

さらに，この双対論理式の定義に立ち戻れば

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})^d &= \mathcal{P}^d \vee \mathcal{Q}^d \\
(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})^d &= \mathcal{P}^d \wedge \mathcal{Q}^d \\
(\neg\mathcal{P})^d &= \neg\mathcal{P}^d
\end{aligned}$$

であることもあきらかである．

7.2.3 双対性定理

$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^d$ とについて，つぎの定理が成り立つ．

定理 7.4. 双対性定理

$$\neg\mathcal{P} \;\equiv\; \mathcal{P}^d\left[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \ldots, \neg p_n/p_n\right]$$

[*5] 数学の様々な分野に双対関係というものがあらわれるが，何と何をもって双対とするのか，について筆者はよくわかってはいない．非常によく似ているけれど微妙に違うものどうし，とか，「裏返し」的なものどうし，などを双対として捉えて，そのあいだの関係を調べる，という方法がとられているようだ．センスの問題なのかもしれない．

(7.1) (p.65) の例で確認すると

$$
\begin{aligned}
\neg\mathcal{P} &= \neg((\neg(p_1 \wedge p_2) \vee \neg(p_3 \wedge p_4)) \wedge (p_1 \vee p_3)) \\
&= (\neg(\neg(p_1 \wedge p_2)) \wedge \neg(\neg(p_3 \wedge p_4))) \vee \neg(p_1 \vee p_3)) \\
&= ((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4)) \vee \neg(p_1 \vee p_3)) \\
&= (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3)
\end{aligned}
$$

であり，(7.2) (p.65) は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \neg p_3/p_3, \neg p_4/p_4\big] \\
&\quad = (\neg(p_1 \vee p_2) \wedge \neg(p_3 \vee p_4)) \vee (p_1 \wedge p_3)\big[p_1/\neg p_1, p_2/\neg p_2, p_3/\neg p_3, p_4/\neg p_4\big] \\
&\quad = (\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge \neg(\neg p_3 \vee \neg p_4)) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3) \\
&\quad = ((\neg(\neg p_1) \wedge \neg(\neg p_2)) \wedge (\neg(\neg p_3) \wedge \neg(\neg p_4))) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3) \\
&\quad = ((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4)) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3) \\
&\quad = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3)
\end{aligned}
$$

となって，どちらも同じ結果になっている．

$\mathcal{P} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_4)$ という連言標準形の場合には

$$
\begin{aligned}
\neg\mathcal{P} &= \neg((\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_4)) \\
&= \neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee \neg(p_3 \vee \neg p_4) \\
&= (\neg(\neg p_1) \wedge \neg p_2) \vee (\neg(p_3) \wedge \neg(\neg p_4)) \\
&= (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg(p_3) \wedge p_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \neg p_3/p_3, \neg p_4/p_4\big] \\
&\quad = ((\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_4))\big[p_1/\neg p_1, p_2/\neg p_2, p_3/\neg p_3, p_4/\neg p_4\big] \\
&\quad = (\neg(\neg p_1) \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge \neg(\neg p_4)) \\
&\quad = (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge p_4)
\end{aligned}
$$

となって，どちらも同じ結果であり，かつ，選言標準形になっている．

$\mathcal{P}$ が選言標準形である場合でも，どちらも連言標準形に変換されてそしてその結果が等しいことはあきらかであろう．

証明は次の通り．

証明． 論理結合子の数に対する構造的帰納法をもちいる．

論理結合子の個数が n 個以下の論理式にたいして，定理は成立すると仮定する．また，表現定理 6.1 (p.52) から，$\mathcal{P}$ は，$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$, $\neg\mathcal{Q}$ のどれかの論理式であらわされるはずである．いま $\mathcal{P}$ の論理結合子の数を $n+1$ 個であるとすると，$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}$ すべてにおいて論理結合子の数は n 個以下であることはあきらか．これを踏まえて，個別に見ていく．

(1) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ のとき

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ ともに論理結合子の数は n 個以下であるから，帰納法の仮定がつかえて

$$
\begin{aligned}
\neg\mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_1^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big] \\
\neg\mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}_2^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big]
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
\neg\mathcal{P} &= \neg(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2) = \neg\mathcal{P}_1 \vee \neg\mathcal{P}_2 \\
&= \mathcal{P}_1^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big] \vee \mathcal{P}_2^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big] \\
&= \left(\mathcal{P}_1^d \vee \mathcal{P}_2^d\right)\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big] \\
&= (\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2)^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big] \\
&= \mathcal{P}^d\big[\neg p_1/p_1, \neg p_2/p_2, \cdots\big]
\end{aligned}
$$

となって，論理結号子が $n+1$ 個の場合も成立する．

(2) $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\vee\mathcal{P}_2$ のとき

$$\begin{aligned}\neg\mathcal{P}&=\neg(\mathcal{P}_1\vee\mathcal{P}_2)=\neg\mathcal{P}_1\wedge\neg\mathcal{P}_2\\&=\mathcal{P}_1^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]\wedge\mathcal{P}_2^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]\\&=\Big(\mathcal{P}_1^d\wedge\mathcal{P}_2^d\Big)\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]\\&=(\mathcal{P}_1\vee\mathcal{P}_2)^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]\\&=\mathcal{P}^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]\end{aligned}$$

となって，論理結号子が $n+1$ 個の場合も成立する．

(3) $\mathcal{P}=\neg\mathcal{Q}$ のとき

$\mathcal{P}^d=\neg\mathcal{Q}^d$ であるから

$$\mathcal{P}^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]=\neg\mathcal{Q}^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]$$

であり, $\mathcal{Q}$ の論理結合子の個数は n 以下であるから, 帰納法の仮定より $\mathcal{Q}^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]=\neg\mathcal{Q}$ がなりたつので

$$\mathcal{P}^d\Big[\neg p_1/p_1,\neg p_2/p_2,\cdots\Big]=\neg\neg\mathcal{Q}=\neg\mathcal{P}$$

となって，論理結号子が $n+1$ 個の場合も成立する．

(4) 以上によって，$\mathcal{P}_1\wedge\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1\vee\mathcal{P}_2$, $\neg\mathcal{Q}$ のすべての形式にたいしてこの定理が成立することが証明された．

$\square$

7.3 コンパクト性定理

興味深い定理を証明してみる．この証明の方法も非常に勉強になる．

定理 7.5. コンパクト性定理

論理式の集合 Γ が充足可能である $\Leftrightarrow$ Γ のすべての有限部分集合が充足可能である

Γ が有限集合であるときには，Γ 自身が有限部分集合でもあるので，この Γ という有限部分集合はもちろん充足可能である．けれども，有限集合の Γ が充足可能であれば，Γ 以外の有限部分集合すべてが充足可能であるということがいえるのだろうか？いやじつはそれは，充足可能の定義からあきらかなのである．有限集合 Γ が充足可能ということは，Γ のすべての要素に T を割り当てる真理値割り当て関数 M が存在するということだった．したがって，どのような有限部分集合をとっても，この M を使えばその要素すべてに T が割り当てられる．なので，すべての有限部分集合は充足可能になる[*6]．

また，Γ が無限集合のときでも，Γ が充足可能であるとしているのだから，やはりすべての（無限個の！）要素に T を割り当てる真理値割り当て関数 M が存在することになる．したがって，すべての有限部分集合も充足可能であるといえる．

以上から，$\Rightarrow$ 方向の証明はすんだことになる．

この定理の真髄は $\Leftarrow$ 方向，すなわち，Γ のどんな有限部分集合をとってもそれらが各々充足可能であるならば，無限集合の Γ も充足可能である，ということが言えるところにある．Γ の真理値割り当て関数の実態はわからなくても，充足可能であることだけは判別できる，ということなのである．

結構込み入った証明になるので，冷静かつ丁寧に進んで行ってみたいと思う．

7.3.1 Δ を構成する

はじめに，すべての論理式の集合は可算集合である，ということを認めることにする[*7]．なぜわざわざこのような仁義を切るのかというと，自然数をインデックスにして論理式を区別し，その順に並べることが必要だからである．したがって，無限個の論理式であっても $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \cdots$ というように整列させられることになる．これが可算集合のいいところである[*8]．

ここで，論理式の集合の列 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_n, \cdots$ を次のように（人工的に）定義する．

定義 7.1.

(1) $\Delta_0 = \Gamma$

(2) $\Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$ のすべての有限部分集合が充足可能であるならば，$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$ とする．

(3) $\Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$ の有限部分集合で，充足不可能なものがあるのならば，$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{ \neg\mathcal{A}_{n+1} \}$ とする．

ここから，煩雑さをさけるために，「すべての有限部分集合が充足可能」ということを「有限充足可能」と略記する．したがって，「有限充足可能でない（有限充足不可能）」ということは，「有限部分集合で充足不可能なものが存在する」ということである．

[*6] この論法だと，空集合という有限部分集合の扱いがどうにも微妙な気がする．要素がないのだから真理値の割り当てもありえないと考えられるが，どんなものなのだろうか．なんらかの「定義」（たとえば $0! = 1$ のようなもの）をいれて回避するのだろうか？もしかしたら，空集合は有限部分集合ではない？

[*7] ゲーデル数を使ってこの事実を証明することも可能である（らしい）が，今のところ筆者の手には余る作業である．戸田山 [3, pp.364-365] に証明の骨格が記されている．

[*8] 自然数と 1 対 1 対応がつけられるという性質である．

さて，上の定義を具体的に書いてみる．Δ_n の構成のされかたは

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0 = \Gamma \\
&\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_0 \cup \{\mathcal{A}_1\} & (\Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ が有限充足可能のとき}) \\ \Delta_0 \cup \{\neg\mathcal{A}_1\} & (\Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ が有限充足可能でないとき}) \end{cases} \\
&\Delta_2 = \begin{cases} \Delta_1 \cup \{\mathcal{A}_1\} & (\Delta_1 \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ が有限充足可能のとき}) \\ \Delta_1 \cup \{\neg\mathcal{A}_1\} & (\Delta_1 \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ が有限充足可能でないとき}) \end{cases} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

という感じである．このようにして，集合の無限の列 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_n, \cdots$ が形成されていく．この Δ_n にたいして次の補題が成立する．

補題 7.1． Δ_n は有限充足可能である．

定義 7.1 (p.68) から，この補題は自明な事柄にも思えてくるのだがどうだろうか？ということで，Δ_1 を使って自明さの度合いを検証してみる．Δ_1 は，定義から

$$
\begin{aligned}
&(\alpha)\ \Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ が有限充足可能なとき } \Delta_1 = \Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\} \\
&(\beta)\ \Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ が有限充足可能でないとき } \Delta_1 = \Gamma \cup \{\neg\mathcal{A}_1\}
\end{aligned}
$$

となる．(α) の場合には Δ_1 が有限充足可能であることは文字通り自明である．

(β) の場合はどうか．$\Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\}$ が有限充足可能でないとしているのだから，$\Gamma \cup \{\mathcal{A}_1\}$ の有限部分集合で充足不可能なものがあるということだ．そのような部分集合を $\mathbb{S}$ と書くことにする．すなわち $\mathbb{S} \models$．この $\mathbb{S}$ は $\mathcal{A}_1$ を要素に含んでいなくてはならないことがわかる．もし $\mathcal{A}_1$ を含んでいないのならば，$\mathbb{S}$ は Γ の有限部分集合であるはずだから，充足可能な有限部分集合になってしまう．これは場合分けの条件に反している．$\mathbb{S}$ が $\mathcal{A}_1$ を含んでいるということをあらわに記述するために，$\mathcal{A}_1$ を含まない有限集合 $\mathbb{S}'$ をつかって，$\mathbb{S} = \mathbb{S}' \cup \{\mathcal{A}_1\}$ と書くことにする．もちろん $\mathbb{S}'$ は Γ の部分集合でもある（したがって，充足可能でもある）．以上から

$$
\mathbb{S} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}' \cup \{\mathcal{A}_1\} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}' \models \neg\mathcal{A}_1 \tag{7.3}
$$

ということがわかる（導出には，定理 5.7 (p.44) の (2) をもちいた）．ここで，そもそもの問題である $\Delta_1 = \Gamma \cup \{\neg\mathcal{A}_1\}$ の有限充足可能性をみるために，Δ_1 が有限充足不可能であると仮定する．背理法の仮定である．すると，いままでと同様の理路にて，$\neg\mathcal{A}_1$ を含む有限部分集合 $\mathbb{U}$ が存在して $\mathbb{U} \models$ となる．そして $\neg\mathcal{A}_1$ を含まない有限部分集合 $\mathbb{U}'$ を使って $\mathbb{U} = \mathbb{U}' \cup \{\neg\mathcal{A}_1\}$ とあらわせば

$$
\mathbb{U} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{U}' \cup \{\neg\mathcal{A}_1\} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{U}' \models \mathcal{A}_1 \tag{7.4}
$$

(7.3) (p.69) と (7.4) (p.69) の結果に単調性の定理（定理 5.6 (p.42) の (2)）をあてはめると，

$$
\begin{gathered}
\mathbb{S}' \cup \mathbb{U}' \models \neg\mathcal{A}_1, \quad \mathbb{U}' \cup \mathbb{S}' \models \mathcal{A}_1 \\
\therefore\ \mathbb{S}' \cup \mathbb{U}' \models \neg\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1
\end{gathered}
$$

となって $\mathbb{S}' \cup \mathbb{U}'$ が矛盾式の集合になる．けれども，$\mathbb{S}', \mathbb{U}'$ は Γ の有限部分集合であったので，有限充足可能なものであり，矛盾式の集合ではない．なにがおかしいか？背理法の仮定がおかしいのである．

このように見てみると，この補題は「定義から自明」ということからは遠い．以上の考察をベースに，証明を仕上げてみる．

証明． その１

(1) $\Delta_0 = \Gamma$ が有限充足可能であるとする[*9]．

[*9] 本題の定理について，$\Leftarrow$ 方向の証明を考えているのだから，この仮定は正当であるといえよう．

(2) Δ_1 は有限充足可能でることが，上の考察から導出されている．

(3) Δ_n が有限充足可能であるとする．このとき Δ_{n+1} は

$$(\alpha)\ \Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \} \text{ が有限充足可能なとき } \Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$$
$$(\beta)\ \Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \} \text{ が有限充足可能でないとき } \Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{ \neg\mathcal{A}_{n+1} \}$$

となる．

(α) の場合には Δ_{n+1} が有限充足可能であることは自明である．

(β) の場合は，$\Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$ が有限充足可能でないのだから，$\Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$ の有限部分集合で充足不可能なものが存在する．そのような部分集合を $\mathbb{S}$ と書く．すなわち $\mathbb{S} \models$. そしてこの $\mathbb{S}$ は $\mathcal{A}_{n+1}$ を要素に含んでいなくてはならない．$\mathcal{A}_{n+1}$ を含んでいないのならば，$\mathbb{S}$ は Δ_n の有限部分集合であるはずだから，充足可能な有限部分集合になるからである．これはここの (β) の場合分けの条件に反している．$\mathbb{S}$ が $\mathcal{A}_{n+1}$ を含んでいるということをあらわに記述するために，$\mathcal{A}_{n+1}$ を含まない有限集合 $\mathbb{S}'$ をつかって，$\mathbb{S} = \mathbb{S}' \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \}$ と書く．$\mathbb{S}'$ は $\mathcal{A}_{n+1}$ を含まないのだから Δ_n の部分集合でもある（したがって，有限充足可能）．以上から

$$\mathbb{S} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}' \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}' \models \neg\mathcal{A}_{n+1}$$

ということがわかる．ここで，$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{ \neg\mathcal{A}_{n+1} \}$ の有限充足可能性をみるために，Δ_{n+1} が有限充足不可能であると仮定する．背理法の仮定である．すると，$\neg\mathcal{A}_{n+1}$ を含む有限部分集合 $\mathbb{U}$ が存在して $\mathbb{U} \models$ となる．そして $\neg\mathcal{A}_{n+1}$ を含まない有限部分集合 $\mathbb{U}'$ を使って $\mathbb{U} = \mathbb{U}' \cup \{ \neg\mathcal{A}_{n+1} \}$ とあらわせば

$$\mathbb{U} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{U}' \cup \{ \neg\mathcal{A}_{n+1} \} \models \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{U}' \models \mathcal{A}_{n+1}\ .$$

単調性の定理から

$$\mathbb{S}' \cup \mathbb{U}' \models \neg\mathcal{A}_{n+1}, \quad \mathbb{U}' \cup \mathbb{S}' \models \mathcal{A}_{n+1}$$
$$\therefore\ \mathbb{S}' \cup \mathbb{U}' \models \neg\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1}$$

となって $\mathbb{S}' \cup \mathbb{U}'$ が矛盾式の集合になる．けれども，$\mathbb{S}', \mathbb{U}'$ は Δ_n の有限部分集合であったので，有限充足可能なものであり，矛盾式の集合ではない．したがって，背理法の仮定はまちがいである．つまり，Δ_{n+1} は有限充足可能である．

(4) 以上まとめると
- Δ_0, Δ_1 は有限充足可能である．
- Δ_n が有限充足可能であれば Δ_{n+1} も有限充足可能である．
- 数学的帰納法により，Δ_n $(n = 0, 1, \cdots, n, \cdots)$ は有限充足可能である．

□

洗練された証明を付け加えておく．戸田山教科書からの写経である．

証明． その２

$\Delta_0 = \Gamma$ が有限充足可能であるとする．

この有限充足可能な Δ_0 から帰納的に定義されている Δ_n が有限充足可能であるのならば，Δ_{n+1} も有限充足可能であることがいえれば良い．いいかえれば，有限充足可能でないということはありえない，ということを示せれば良い．背理法を使おう．その戦略は，

Δ_n は有限充足可能でありながら，Δ_{n+1} が有限充足可能ではないと仮定して，それは矛盾している，ということを示す．ただし，Δ_{n+1} には

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{ \mathcal{A}_{n+1} \} \\ \Delta_n \cup \{ \neg\mathcal{A}_{n+1} \} \end{cases}$$

という２通りのパターンがあるので，そのどちらにおいても有限充足可能ではない，と仮定する．

というものである．

まず，$\Delta_n \cup \{\neg\mathcal{A}_{n+1}\}$ は有限充足可能ではないという仮定を利用する．すると，$\Delta_n \cup \{\neg\mathcal{A}_{n+1}\}$ の有限部分集合で，充足可能でないものがあるということになる．一方で，Δ_n は有限充足可能であると仮定したのであった．なので，「$\Delta_n \cup \{\neg\mathcal{A}_{n+1}\}$ の有限部分集合で，充足可能でないものがある」ということは，Δ_n のなんらかの有限部分集合に $\{\neg\mathcal{A}_{n+1}\}$ を合併したものであることになる．この「Δ_n のなんらかの有限部分集合」を Δ'_n とあらわすことにすると，今述べた結論は

$$\Delta'_n \cup \{\neg\mathcal{A}_{n+1}\}\text{ は充足不可能} \quad\Leftrightarrow\quad \Delta'_n, \{\neg\mathcal{A}_{n+1}\} \models$$

となる Δ'_n が存在するということになる．

同様な論法で進める，こんどは，$\Delta_n \cup \{\mathcal{A}_{n+1}\}$ は有限充足可能ではないという仮定を利用する．すると，$\Delta_n \cup \{\mathcal{A}_{n+1}\}$ の有限部分集合で，充足可能でないものがあるということになる．一方で，Δ_n は有限充足可能であると仮定したのであった．なので，「$\Delta_n \cup \{\mathcal{A}_{n+1}\}$ の有限部分集合で，充足可能でないものがある」ということは，Δ_n のなんらかの有限部分集合に $\{\mathcal{A}_{n+1}\}$ を合併したものであることになる．この「Δ_n のなんらかの有限部分集合」を Δ''_n とあらわすことにすると，今述べた結論は

$$\Delta''_n \cup \{\mathcal{A}_{n+1}\}\text{ は充足不可能} \quad\Leftrightarrow\quad \Delta''_n, \{\mathcal{A}_{n+1}\} \models$$

となる Δ''_n が存在するということになる．

定理 5.7 (p.44) の (2) から

$$\Delta'_n, \{\neg\mathcal{A}_{n+1}\} \models \quad\Leftrightarrow\quad \Delta'_n \models \mathcal{A}_{n+1}$$
$$\Delta''_n, \{\mathcal{A}_{n+1}\} \models \quad\Leftrightarrow\quad \Delta''_n \models \neg\mathcal{A}_{n+1}$$

となる．その結果

$$\Delta'_n \cup \Delta''_n \models \mathcal{A}_{n+1}, \neg\mathcal{A}_{n+1}$$

となって[*10]，$\Delta'_n \cup \Delta''_n$ が矛盾式の集合であることになる．ところが，$\Delta'_n \cup \Delta''_n$ はともかく Δ_n の有限部分集合なのであるのだから，有限充足可能であるはずである．したがって，この結論は Δ_n が有限充足可能であるという大前提に反しているから，間違いである．したがって，背理法の仮定が違っている，すなわち Δ_{n+1} は有限充足可能であるということになる． □

Δ_n の有限充足性が確認できたので，Δ を次のように定義する．

定義 7.2. $$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n \cup \cdots$$

Δ は次の性質をもつ：

I. $\Gamma \subseteq \Delta$.

II. すべての論理式 $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n, \cdots$) について，$\mathcal{A}$ か $\neg\mathcal{A}$ のどちらかが Δ の要素である（もちろん，両方ということはない）．

III. Δ は有限充足可能である．

I. は今までの理路からあきらかである．II. もあきらかであると思うが，念のために Δ_1, Δ_2 を列挙してみると

$$\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{\mathcal{A}_1\} \text{ または } \Delta_0 \cup \{\neg\mathcal{A}_1\}$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\mathcal{A}_2\} \text{ または } \Delta_1 \cup \{\neg\mathcal{A}_2\} = \begin{cases} \Delta_0 \cup \{\mathcal{A}_1\} \cup \{\mathcal{A}_2\} \text{ または} \\ \Delta_0 \cup \{\mathcal{A}_1\} \cup \{\neg\mathcal{A}_2\} \text{ または} \\ \Delta_0 \cup \{\neg\mathcal{A}_1\} \cup \{\mathcal{A}_2\} \text{ または} \\ \Delta_0 \cup \{\neg\mathcal{A}_1\} \cup \{\neg\mathcal{A}_2\} \end{cases}$$

[*10] 再確認．これは単調性の定理（定理 5.6 (p.42) の (2)）からの導出．

となって，あきらかさが実感される．

III. を検討する．Δ の有限部分集合を Δ' とする．Δ' が論理式 $\mathcal{A}$ または $\neg\mathcal{A}$ のどれひとつとして含まない場合，それは $\Delta_0 = \Gamma$ の有限部分集合でもあるので，有限充足可能である．どれかを含んでいる場合には，有限部分集合であるから，含まれている $\mathcal{A}$ または $\neg\mathcal{A}$ のうちインデックスが最大のものが必ずある．そのインデックスを n とする，つまり，$\mathcal{A}_n$ または $\neg\mathcal{A}_n$ が含まれていることになる．となると，この Δ' は Δ_n の有限部分集合でもあることになる．そして補題 7.1 から Δ_n は有限充足可能であった．それゆえ Δ' も有限充足可能である．以上から，Δ も有限充足可能であることになる．

有限充足可能な論理式の集合 Γ から始めて，$\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_n, \cdots$ を構成し，最終的に $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ として Δ を作り上げてきた．そしてこの Δ が，I., II., III. という性質をもっていることが導き出された，というのがここまでの旅程である．この行為は「Γ の Δ への拡大」と呼ばれる．

7.3.2 Δ をもとにして，真偽値割り当て関数 M_Δ をつくる

つぎに，Δ を利用して真偽値割り当て関数 M_Δ を定義する．原子命題 p_i が Δ に含まれているかどうかを真偽値割り当ての拠り所とするのである．これを定義としておこう．

定義 7.3. 原子命題 p_i が真偽値割り当て関数 M_Δ のもとで T である $\Leftrightarrow$ $p_i \in \Delta$

この定義によって次の補題がなりたつ：

補題 7.2.

すべての論理式 $\mathcal{A}$ が，定義 7.3 で定められた真偽値割り当て関数 M_Δ のもとで T である

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A} \in \Delta$

この補題の意味するところはこうだ．$\Rightarrow$ 方向は，M_Δ によって T となる論理式はすべて Δ に属している，ということを主張している．$\Leftarrow$ 方向は，論理式 $\mathcal{A}$ が Δ の要素なのであれば，それは M_Δ のもとで常に T ということを示している．これを合体させて $\Leftrightarrow$ とするということは，M_Δ は Δ に属する論理式のみを T とする真理値割り当て関数であるということになる．

証明. 論理結合子の数に対する構造的帰納法を使う．

(1) $\mathcal{A}$ に含まれる論理結合子が 0 個のとき，$\mathcal{A}$ は原子命題に他ならないから，定義 7.3 から

$\mathcal{A}$ が M_Δ のもとで T である $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in \Delta$

はあきらかである．

(2) $\mathcal{A}$ に含まれる論理結合子が k 個以下のとき

$\mathcal{A}$ が M_Δ のもとで T である $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in \Delta$

が成立すると仮定する．この仮定のもとで，$k+1$ 個のときの成立が示されれば良い．

(a) $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$ のとき

$$
\begin{aligned}
\neg\mathcal{B}\ \text{が}\ M_\Delta\ \text{のもとで}\ T\ \text{である} &\Leftrightarrow \mathcal{B}\ \text{が}\ M_\Delta\ \text{のもとで}\ F\ \text{である} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{B} \notin \Delta \quad \text{（帰納法の仮定から）} \\
&\Leftrightarrow \neg\mathcal{B} \in \Delta \quad \text{（}\Delta\ \text{の性質 (2) により）}
\end{aligned}
$$

(b) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ のとき

$$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \text{ が } M_\Delta \text{ のもとで } T \text{ である } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ が } M_\Delta \text{ のもとで } T\text{，かつ，} \mathcal{C} \text{ が } M_\Delta \text{ のもとで } T$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \in \Delta \text{ かつ } \mathcal{C} \in \Delta$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \in \Delta$$

最後の変形は一瞬まごつくけれど，背理法で攻略する．

$\mathcal{B} \in \Delta$, $\mathcal{C} \in \Delta$ であるけれども $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \notin \Delta$ であるとする．すると Δ の性質 (2) から $\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \in \Delta$ であることになる．ということは，$\{\mathcal{B}, \mathcal{C}, \neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})\}$ が Δ の有限部分集合ということになる．ここでは，$\mathcal{B} \in \Delta$, $\mathcal{C} \in \Delta$ としたのだから，$M_\Delta(\mathcal{B}) = T$ であり $M_\Delta(\mathcal{C}) = T$ である．そのような状況では

$$M_\Delta(\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})) = \neg M_\Delta(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = \neg(M_\Delta(\mathcal{B}) \wedge M_\Delta(\mathcal{C})) = \neg(T \wedge T) = F$$

となってしまい，M_Δ のもとで $\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ は T にならない．つまりこの論理式の集合は充足されない（矛盾している）ことがわかる．これは Δ の性質 (3)（有限充足可能であるということ）に反している．なので，仮定が誤っている．すなわち $\mathcal{B} \in \Delta$, $\mathcal{C} \in \Delta$ であるならば $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \in \Delta$ となる．

逆に，$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \in \Delta$ であるけれども，「$\mathcal{B} \in \Delta$ かつ $\mathcal{C} \in \Delta$」でない，とする．「$\mathcal{B} \in \Delta$ かつ $\mathcal{C} \in \Delta$」でない，ということは，「$\mathcal{B} \notin \Delta$」または「$\mathcal{C} \notin \Delta$」ということである．$\mathcal{B} \notin \Delta$ の場合から考える．$\mathcal{B} \notin \Delta$ であるから，$\neg\mathcal{B} \in \Delta$．したがって $\{\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \neg\mathcal{B}\}$ は Δ の有限部分集合になる．それゆえ，$M_\Delta(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = T$ であり，かつ，$M_\Delta(\neg\mathcal{B}) = T$ であることになる．ここで，$M_\Delta(\neg\mathcal{B}) = \neg M_\Delta(\mathcal{B})$ であることに着目すると $M_\Delta(\mathcal{B}) = F$ ということになる．これは $M_\Delta(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = M_\Delta(\mathcal{B}) \wedge M_\Delta(\mathcal{C}) = T$ とは相容れない．つまり，$\{\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \neg\mathcal{B}\}$ は充足されない（矛盾している）ということになり，Δ が有限充足可能であるということに反している．$\mathcal{C} \notin \Delta$ の場合も同様である．以上から，仮定が誤っていることが示される．すなわち $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \in \Delta$ であるならば，「$\mathcal{B} \in \Delta$ かつ $\mathcal{C} \in \Delta$」である．

この理路によって

$$\mathcal{B} \in \Delta \text{ かつ } \mathcal{C} \in \Delta \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \in \Delta$$

が導き出されたのである．

(c) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ のとき

$$\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \text{ が } M_\Delta \text{ のもとで } T \text{ である } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ が } M_\Delta \text{ のもとで } T\text{，または，} \mathcal{C} \text{ が } M_\Delta \text{ のもとで } T$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \in \Delta \text{ または } \mathcal{C} \in \Delta$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{C} \in \Delta$$

またもや，最後の変形に少々まごつく．これも背理法で攻略する．

$\mathcal{B} \in \Delta$ であるけれども $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \notin \Delta$ であるとする．すると Δ の性質 (2) から $\neg(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \in \Delta$ であることになる．ということは，$\{\mathcal{B}, \neg(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})\}$ が Δ の有限部分集合ということになる．したがって，$M_\Delta(\mathcal{B}) = T$ であり，それゆえ $M_\Delta(\neg\mathcal{B}) = F$ である．そのとき

$$M_\Delta(\neg(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})) = M_\Delta(\neg\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}) = M_\Delta(\neg\mathcal{B}) \wedge M_\Delta(\neg\mathcal{C}) = F \wedge M_\Delta(\neg\mathcal{C}) = F$$

となってしまい，M_Δ のもとで $\neg(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ は T にならない．つまりこの論理式の集合は充足されない（矛盾している）ことがわかる．

$\mathcal{C} \in \Delta$ であるけれども $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \notin \Delta$ である場合も同様である．

以上の 2 つの場合ともに Δ が有限充足可能であるということに反している．なので，仮定が誤っているから，それをただして，「$\mathcal{B} \in \Delta$ または $\mathcal{C} \in \Delta$」であるならば，$\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \in \Delta$ ということになる．

逆に，$\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \in \Delta$ であるけれども，「$\mathcal{B} \in \Delta$ または $\mathcal{C} \in \Delta$」でない，とする．「$\mathcal{B} \in \Delta$ または $\mathcal{C} \in \Delta$」でない，ということは，「$\mathcal{B} \notin \Delta$ かつ $\mathcal{C} \notin \Delta$」ということである．それゆえ，$\neg\mathcal{B} \in \Delta$ であり，かつ，$\neg\mathcal{C} \in \Delta$ ということになる．したがって $\{\mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \neg\mathcal{B}, \neg\mathcal{C}\}$ は Δ の有限部分集合になる．真理値割り当てを列挙すれば

$$
\begin{aligned}
&M_\Delta(\neg\mathcal{B}) = T \;\Leftrightarrow\; M_\Delta(\mathcal{B}) = F \\
&M_\Delta(\neg\mathcal{C}) = T \;\Leftrightarrow\; M_\Delta(\mathcal{C}) = F \\
&M_\Delta(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = M_\Delta(\mathcal{B}) \vee M_\Delta(\mathcal{C}) = F \vee F = F
\end{aligned}
$$

となるが，そもそも $M_\Delta(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = T$ なのであったからこれはおかしい．つまり，$\{\mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \neg\mathcal{B}, \neg\mathcal{C}\}$ は充足されないということになり，Δ が有限充足可能であるということに反している．なので，仮定が誤っていることが示される．すなわち $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \in \Delta$ であるならば，「$\mathcal{B} \in \Delta$ または $\mathcal{C} \in \Delta$」なのである．
この理路によって

$$\mathcal{B} \in \Delta \text{ または } \mathcal{C} \in \Delta \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} \vee \mathcal{C} \in \Delta$$

が導き出される．

(d) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，$\mathcal{A} = \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$ のとき
省略（飽きた．それに，$\{\neg, \wedge, \vee\}$ で十全であったから，この 2 つをあらたに証明するまでもあるまい）．

(3) 以上から，論理結合子が $k+1$ 個のときの成立も導かれた．したがって，構造的帰納法によって，この補題が証明されたのである．

$\square$

7.3.3 再びコンパクト性定理

コンパクト性定理を再度書き下すと

論理式の集合 Γ が充足可能である $\Leftrightarrow$ Γ は有限充足可能である

ということであった．そして，$\Rightarrow$ 方向の証明は冒頭で完了していて，$\Leftarrow$ 方向，つまり

論理式の集合 Γ が充足可能である $\Leftarrow$ Γ のすべての有限部分集合が充足可能である

を残すのみであった．

Γ が充足可能である，という事柄を素直に示すには，Γ に含まれるすべての論理式を T にする真理値割り当て関数（いまそれを M_Γ と記すことにしよう）を作成する必要がある．しかしながら，Γ には無数個の論理式があるので，Γ のみから M_Γ を作るのはそう簡単ではない．ところが，Γ を Δ に拡大することにより，それが実現されるのである．道筋はつぎのとおり：

- Γ を拡大して Δ を作る
  ここで用いた拡大方法にしたがうと，Δ には有限充足可能という性質があることがわかった．さらに，$\Gamma \subseteq \Delta$ であることもあきらかであった．
- M_Δ を定義する
  原子命題が T であることを，Δ の要素であるかどうかで決めることにした．すなわち

  $$M_\Delta(p) = T \;\Leftrightarrow\; p \in \Delta$$

  ととりきめた．
- 任意の論理式 $\mathcal{A}$ において $M_\Delta(\mathcal{A}) = T \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \in \Delta$ が導出できた（補題 7.2）．

- $\Gamma \subseteq \Delta$ であるから，Γ の要素であるすべての論理式 $\mathcal{B}$ についても $M_\Delta(\mathcal{B}) = T \iff \mathcal{B} \in \Gamma$ が導出できる（もちろん $\mathcal{B} \in \Delta$ でもある）．つまり，M_Γ として M_Δ を採用すれば，それは Γ に含まれるすべての論理式を T にする真理値割り当て関数になる．

こうすることによって，コンパクト性定理の $\Leftarrow$ 方向が証明できたのである[*11]．

めでたく証明できたコンパクト性定理から，次の定理が導出される．

定理 7.6. もし $\Gamma \models \mathcal{A}$ であるならば，Γ の有限部分集合 Γ_0 で $\Gamma_0 \models \mathcal{A}$ となる Γ_0 が存在する．

証明． 対偶関係を証明する[*12]．
対偶はつぎのとおり：
　Γ の有限部分集合 Γ_0 すべてにおいて $\Gamma_0 \not\models \mathcal{A}$ であるならならば $\Gamma \not\models \mathcal{A}$ である．
これを証明する．
まず大前提として，Γ は有限充足可能であることが前提されていることに気をつける．そしてコンパクト性定理から Γ は充足可能であることも前提されている．その結果，有限部分集合 Γ_0 も充足可能であることになっている．どちらも充足可能であるから，矛盾式の集合ではない．
さて，定理 5.7 (p.44) の (2) を利用すれば

$$\Gamma_0 \not\models \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_0 \models \neg\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_0 \cup \{\, \mathcal{A} \,\} \models$$

となるから，$\Gamma_0 \cup \{\, \mathcal{A} \,\}$ は矛盾式の集合であることがわかる．ところが，Γ_0 は充足可能であった．したがって，$\Gamma_0 \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ は充足可能であることがわかる．
そして，$\Gamma_0 \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ は $\Gamma \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ の有限部分集合であり，Γ_0 は Γ の有限部分集合すべてをあらわしているので，$\Gamma_0 \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ は $\Gamma \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ のすべての有限部分集合をあらわしている．それゆえ，$\Gamma \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ は有限充足可能である．
ここでコンパクト性定理を使う．$\Gamma \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ は有限充足可能であるから $\Gamma \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\}$ は充足可能，つまり，矛盾式の集合ではありえない．したがって，大前提の Γ が充足可能であることと，再び定理 5.7 (p.44) の (2) を利用すれば

$$\Gamma \cup \{\, \neg\mathcal{A} \,\} \not\models \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\, \mathcal{A} \,\} \models \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \neg\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \not\models \mathcal{A}$$

となって，対偶が証明された．ゆえに，もとの定理が成立することが証明される． □

さて，これでいったい何が言えてくるのか？ $\Gamma \models \mathcal{A}$ ならば有限部分集合 $\Gamma_0 \models \mathcal{A}$ ということであるから，たとえ無限個の論理式の集合 Γ であったとしても，$\Gamma \models \mathcal{A}$ に責任をもつのは，有限部分集合 Γ_0 なのだ，ということが言えてくるのである．つまり，責任を持つのは，有限個の論理式なのである，ということだ．すこしありがたいかもしれない．

[*11] M_Δ は，その実態はわからないけれども，Δ の要素であるかどうかで判定されるので，それなりに意味合いがわかりやすい真偽値割り当て関数と言えると思う．
[*12] ここでこの論法を使っていいのだろうか？一階述語論理のエッセンス入りまくりなのであるけれども．

第 8 章

命題論理妄想的雑観

ここまでで，ひととおり（そしてまがりなりに）命題論理というものを学習してきた．個人的にはそれなりの手ごたえがあったと感じている．

けれども，まだ「対象言語」と「メタ言語」の明快な区別がわたくしのなかでは形成されていない．命題論理を説明する際にメタ言語を使うことは，すんなりと納得できる．しかしながら諸定理を証明する際に，メタ言語上で背理法を使ったり，対偶を証明する，という行為がなぜ正当化されるのかが，まだはっきりと理解できない．背理法や対偶は，命題論理から導き出されるものではなかったのだろうか？

自己言及を避けるという目的はわかるのだが，どうもいまひとつその正当化が腑に落ちない．もう少し学習を続けていけば，理解は深まるのだろうか？

命題とは，真偽が決定できる文である．文とは，長い文章であってもよいし，数学的な式であっても良いし，その組み合わせであってももちろんよい．文にたいする制限はない．文について真偽が決められればそれでよい．日常生活は真とも偽ともいえないものに満ち溢れているけれど，それは命題とは言わない．日常は命題だけで成り立つものではない．とにかく重要なことは，命題については真か偽のどちらかなのだ．中間はない．それは認めよう．

世の中喧しいのは，「ならば」で作られる命題 $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ の真理表である．

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

上の真理表の通り，これは「$\mathcal{P}$ が真で $\mathcal{Q}$ が偽のとき」のみ偽になる命題である．$\mathcal{P}$ が偽であれば，$\mathcal{Q}$ の真偽にかかわらず真になる命題なのである．つまり

「$1 = 0$ である」　ならば　「$3 > 1$ である」
「$1 = 0$ である」　ならば　「$1 > 3$ である」

は，どちらも真の命題である．ま，ちょっと気持ちが悪い．その気持ち悪さは，われわれに「ならば」という言葉によって因果関係が想起されるからだろう．この感覚との相違は割り切るしかあるまい．もちろん，その因果関係がなりたつ場合も内包されている．それは $\mathcal{P}$ が真で $\mathcal{Q}$ も真の場合の「ならば」である．これだけであれば，感覚的な問題はない．けれどもそれだけにすることはできないのである．

全く関係の無い命題を「ならば」でつなげることもできるけれど，個人的にはそれはナンセンスの範疇だと思う．

「地球は直方体である」　ならば　「雨はそらから降る」
「月は存在しない」　ならば　「太陽は西から昇る」

この２つの命題が真だとしても，ナンセンス以外のなにものでもないではないか．逆にいえば（いや,「逆にいう」とはどういうことなのか？ここに，論理法則を説明するときの困難さが立ち現れてくる．「逆」ってなんだ？)，ナンセ

ンスは真なのである，ということもできるが，どう折り合いをつけたものか．

しからばこれはどうか．

「光は粒子である」	ならば	「スリットを通った光は干渉縞を作らない」
「光は粒子である」	ならば	「スリットを通った光は干渉縞を作る」
「光は波である」	ならば	「スリットを通った光は干渉縞を作る」
「光は波である」	ならば	「スリットを通った光は干渉縞を作らない」

量子力学形成の格闘の歴史が込められているような命題だ．時代とともに真偽が問われ続ける命題もあるのだ．

真理表が命題の論理的同値性をさだめるのだとしたら

「水星が存在する」$\longrightarrow$「木星が存在する」

これ全体は真である．記号 $\longrightarrow$ は何を物語っているのか？これを「惑星命題問題」と名付けておこう．

第 III 部

一階述語論理（変項がひとつのとき）

述語論理とは，命題の内部に立ち入って論証の正しさを研究するものである．命題を，述語論理で項数が 0 の場合，というように考える流儀もあるが，ここでは，命題論理を土台にして構築される，という立場をとる．

何某かの対象をさだめ，その対象の性質や対象間の関係を定めるための論理が述語論理である．もちろん，述語も意味をもつ．そして，述語は変項をもつ．変項に代入されるものと述語の意味によって，論理式の真理値が決まる．変項を利用して，命題に内部構造を持ち込む，という見方もできよう．

第 9 章

構文論

9.1　命題の内部構造

第 II (p.11) 部の命題論理では，命題とは真偽の決まる文であるとした．そして文というものはなんでも良い，真偽が決まる文でありさえすれば命題であるという事にした．さて，真偽が決まる文とはどういうものであろうか？命題論理のときには，そこは深く考えずに回避していた．いいかえれば．真偽の定め方は，命題論理の言語 L ここで，まず，日常言語（そして日本語）をもとにして，文の真偽の決まり方を素描してみようと思う．

そもそも言語学的な素養は個人的には希薄であるので，ひとまず思い切り簡単化して

文 ＝ S は P である
　　　　または「である」を省いて
文 ＝ S は P

というように，文というものを規定することにする．この 「S」 を主語と呼ぶ．「P である」，または「P」を述語と呼ぶ．

この S や P にはどういうものが適用できるだろうか？経験的に，少なくとも名詞はあてはまるということが言える．そして名詞には，固有名詞と普通名詞という区別ができる．例えば

林家三平は落語家である．

という文の主語にあらわれる「林家三平」は，固有名詞である．実在する唯一無二の個体をさし，常に同じものをさす．文脈に依存しない[*1]．述語となっている「落語家」は普通名詞である．落語家であるひとは一人ではない．実際たくさんの人が落語家である．このように，普通名詞は，いくつかの，複数の個体にあてはまるものである．

では，この普通名詞が主語になったばあいはどうか？

落語家は歌が上手である．

この「落語家」という名詞であらわされる主語は，対象を一つに特定しない．つまり個体とは言い切れないのである．けれども，落語家ひとりひとりについて見ていくと，歌の上手い落語家もいれば下手な落語家もいるだろう．漠然感をさけるために工夫をすると，この普通名詞が主語である文は

落語家みんな歌が上手である．$\Leftrightarrow$ すべての落語家は歌が上手である． $\Leftrightarrow$ どんな落語家も歌が上手である．

とか，

落語家の中には歌が上手な人がいる $\Leftrightarrow$ 落語家の中には歌が下手な人もいる $\Leftrightarrow$ すべての落語家が歌が上手いわけではない

というような分類ありそうだという想像がつく．

*1 ここでは，落語界の襲名制度はないものとして，当代の噺家の名前を考えている．ちなみに，わたくしは初代林家三平の大ファンである．本題とはまったく関係のない情報である．

主語が固有名詞ならば，その文の真偽の判定は容易であろう．対象が個体として存在しているのだから，真偽の判断がつけやすい．主語が普通名詞の場合も，いまみたような分類を施せば，分類された文各々について真偽の判定が容易になると思われる．

以上見てきたように，命題を作る文にはこのような構造が存在することが見いだせる．日常言語に引っ張られずにここまでの考察を記号で論理化していくことが，ここから述べる述語論理の課題である。

9.2 項のイメージ，述語のイメージ

これから，「項（term）」というものを基本として考えていくので，まず項にまつわるものの名称を決めておく．

しかし，その前に，「個体」について覚えを書いておく必要がある．個体とはなにか？先の素描の例でいえば，落語家の固有名詞の群れである．林家三平，柳家こさん，三遊亭円丈，柳亭左楽····などなど．これを一般化して，考察の対象で，互いの区別がつき，文脈によって変わるようなことのないものひとつひとつを，個体と呼ぶことにする．

そして，唯一無二に個体を定めるものを「個体定項」と言う[*2]．個体定項には，a, b, c などの文字を使うことにする．

また，複数の個体にあてはまるもの，というよりは，複数の個体をあてはめることを許すものを，「個体変項」と言う[*3]．個体変項には，x, y, z などの文字を使う．

そのうえで，項というものを次のように帰納的に定義する[*4]：

(1) 個体変項は項である．
(2) 個体定項は項である．
(3) 以上の様にして得られるもののみが，項である．

項と並ぶぶもうひとつの基本として，「述語」がある[*5]

述語を $p(\cdot)$ という記号であらわすとすると

- $p(a)$ は個体定項 a についての述語
- $p(x)$ は個体変更 x についての述語

ということになる．

留意するべきところは，$p(a)$ であれば，a が唯一無二のものであると定まっているので，真偽ははっきりするということである．「林家三平は落語家である」が真であるというように．一方，$p(x)$ については，x がなにであるか決まるまでは真偽ははっきりしない．「x は落語家である」ということが x の内容次第で真にも偽にもなる．x が「王貞治」であったら，「王貞治は落語家である」は偽であるだろう．

その意味で，$p(a)$ は命題であり，$p(x)$ は正式な命題ではないのである[*6]．

先の素描で見たように，普通名詞を主語とする文の分類において，「すべての〜」とか「なかには〜がある」という形のものがあった．これを，量化子（quantifier）と呼ばれる新たな記号 $\forall$ と $\exists$ を使って，次のように記号的に表現する．

- $\forall x\, p(x)$ は，「すべての x について $p(x)$ である」，という事柄をあらわす．個体変項 x にすべての個体をあてはめても $p(\cdot)$ であるということ．

*2 個体をなすものが実数であれば，π や e がこれにあたる，と考えてもあながち的は外れていないと思う．

*3 関数における変数を想像しても，あながち的は外れていないと思う．

*4 この定義では，わざわざ帰納的定義に持ち込む必要があまり感じられない．「項とは，個体変項と個体定項のことである」というだけで足りる．けれども，ものによっては，関数記号 $f(\cdot)$ を導入し，「t が項ならば $f(t)$ も項である」というものを付け加えて，項を定義しているものがある．その流儀では帰納的に定義せざるをえない．本稿での定義は，いわば，折衷案．

*5 述語というものを，「個体の集合から命題の集合への関数である（命題関数）」ととらえると戸田山教科書はのべているが，このとらえかたは，まだうまく咀嚼できていない．個体変項であらわされた $p(x)$ は命題なのだろうか？ x に何かをいれないと命題化はできないのではないのか？この点については，もう少し考えを深めねばならないとおもうので，一旦保留．

*6 なのに述語を命題関数とよぶのは，やはり少し無理があるといえなくもない．なお，後に記す意味論の各章で，ここで先走って述べた一階述語論理での「真偽」について詳細を検討する．

- $\exists x\, p(x)$ は,「$p(x)$ である x が存在する」, という事柄をあらわす. 個体変項 x にたいして, すくなくともひとつの個体では $p(\cdot)$ であるということ. もちろん複数の個体が $p(\cdot)$ であってもよい.

これらは命題だろうか？真偽を決められれば, それは命題となる. どのように真偽を決めるのか, それが述語論理の意味論の課題である.

9.3 論理式（formula）の定義

述語がひとつの項のみしかもてない一階述語論理の世界の「言語」を MPL と名付ける[*7]. MPL は次の記号（語彙）で構成される：

項：

- 個体定項： $a, b, c, \cdots$
- 個体変項： $x, y, z, \cdots$

述語： $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot), \cdots$ （小文字を用いる）

論理定項：

- 結合子： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 量化子： $\forall, \exists$

補助記号：(,)

語彙が定まったので, MPL の論理式を次のように定義する（MPL の文法である）.

(1) $p(\cdot)$ が述語, τ が項であれば, $p(\tau)$ は論理式である. これを原子論理式と名付ける.
(2) P が論理式であるならば, $(\neg P)$ も論理式である.
(3) P, Q がともに論理式であるならば $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q), (P \leftrightarrow Q)$ も論理式である.
(4) P が論理式であり, ξ が個体変項であるならば, $\forall \xi\, P$, $\exists \xi\, P$ ともに論理式である.
(5) 以上の様にして得られるもののみが, 論理式である.

P, Q は MPL の語彙ではなく, メタ記号である. つまり, 論理式を代表しているもの. ξ も同様にメタ記号である. これは, 個体変項を代表している. τ というメタ記号は, 項（個体定項, 個体変項）を代表する. また, $\forall$ と $\exists$ の両方をあらわしたい場合に Q というメタ記号が使われることもある. 論理式と混同しないようにしたい.

論理式のかっこの省略については, 命題論理の場合と同じルールをつかう. 命題論理式にはなかった量化子についての括弧については

$$\mathsf{Q}_1\xi\,(\mathsf{Q}_2\zeta\, P) = \mathsf{Q}_1\xi\, \mathsf{Q}_2\zeta\, P$$

を認めることにする. 括弧をもちいて, 明示的にわかりやすくすることが最優先であることは, 言うまでもない.

論理式が上のように定義されたことから, $p(a) \wedge q(x)$ も立派な論理式である. さらに $\exists x\, p(a)$ や $\forall y\, p(x), \exists x \forall x\, p(x)$ なども論理式である. これらをつじつまが合うようにどう捉えるか, については意味論を整備しなければならない.

[*7] 命題論理のときは, L とした.

9.4　自由変項と束縛変項，閉論理式

▷ 量化子のスコープ

論理式の形によっては，量化子で形容される範囲（スコープ）が判然としなくなることがある．そこで，括弧の力を借りて，スコープを確認しておく．

$$\forall x\,(P \wedge Q),\quad \exists x\,(P \wedge Q)$$

の $\forall x, \exists x$ は $P \wedge Q$ に及ぶが

$$\forall x\,P \wedge Q,\quad \exists x\,P \wedge Q$$

の $\forall x, \exists x$ は P にのみ及び，Q には影響しない．また，形式から容易に想像できるが，

$$P \wedge \forall x\,Q,\quad P \wedge \exists x\,Q$$

の $\forall x, \exists x$ は Q にのみ及び，P には影響しない．丁寧に書けば

$$\begin{aligned} \forall x\,P \wedge Q &= (\forall x\,P) \wedge Q, &\quad P \wedge \forall x\,Q &= P \wedge (\forall x\,Q) \\ \exists x\,P \wedge Q &= (\exists x\,P) \wedge Q, &\quad P \wedge \exists x\,Q &= P \wedge (\exists x\,Q) \end{aligned}$$

である．他の論理演算子についても同様である．

▷ 自由変項，束縛変項

量化子のスコープから，論理式の個体変項について，量化子の影響を受けているものとまったく影響を受けていないものという 2 種類の区別をつけることが可能になる．量化子の影響を受けている個体変項は束縛変項，影響を受けていないものは自由変項と呼ばれる．

論理式 $\forall x\,(p(x) \vee (\exists y\,q(y) \wedge \exists z\,r(y)))$ を題材にする*8．量化子のスコープと括弧の対応から，まず

$$A := p(x) \vee (\exists y\,q(y) \wedge \exists z\,r(y))$$

とすれば，元の論理式は

$$\forall x\,A$$

となるので，この $\forall x$ は A 全体に及んでいる．したがって x は，全体を通して，束縛変項である．またこの A は

$$\begin{aligned} B &:= \exists y\,q(y) \\ C &:= \exists z\,r(y) \end{aligned}$$

とみなして

$$A = p(x) \vee (B \wedge C)$$

とあらわすことができる．ここで B の中にある $\exists y$ は $q(y)$ のみを形容している．つまり，B においては，y は束縛変項であり，自由変項はない．C の中にある $\exists z$ は $r(y)$ だけを形容している．よって，C において y は自由変項である．さて一方で，全体 A について x は束縛変項であった．したがって，この論理式全体における自由変項は $C = \exists z\,r(y)$ の y ということになるのである．いくら $B = \exists y\,q(y)$ で y が束縛されていたとしても，そのスコープは C に及ばないので，C の y は自由変項のまま存続するのである．量化子のスコープに応じて，個体変項は自由であったり束縛されたりするのである．

---

*8 $\exists z\,r(y)$ という形は，述語 r が z を含まないのだから，$r(y)$ そのものでも問題はない．ここでは，ある意味説明のため，$\exists z$ が，形式的に，付加されていると考えて差し支えはない．

▷ 閉論理式

量化子のスコープから，個体変項について自由変項と束縛変項という区別が得られた．この区別を利用して，自由変項を含まない論理式を「閉論理式」と呼ぶ．たとえば

$$\forall x\, p(x),\ \exists y\, q(y)$$
$$\forall x\, (p(x)\ \underline{\mathsf{op}}\ q(x))$$

は閉論理式である（$\underline{\mathsf{op}}$ は論理定項の結合子のどれかを代表している）．いっぽうで

$$p(x), q(y)$$
$$\forall x\, p(x)\ \underline{\mathsf{op}}\ q(x)$$
$$\exists x\, (p(x)\ \underline{\mathsf{op}}\ q(y))$$

などは閉論理式ではない．閉論理式ではないものを開論理式と呼ぶこともある．

また，個体定項を適用した述語 $p(a)$ は，やはり自由変項を含まないので，閉論理式となる．

9.5　量化子についての補足

以下の事柄は自明であるとは思うが，一応記しておく．

まず，Q は自由変項 x を含まない論理式であるとすると

$$Q \wedge (\forall x\, P) = \forall x\, (Q \wedge P)$$
$$Q \vee (\forall x\, P) = \forall x\, (Q \vee P)$$
$$Q \wedge (\exists x\, P) = \exists x\, (Q \wedge P)$$
$$Q \vee (\exists x\, P) = \exists x\, (Q \vee P)$$

である．また，同じ量化子が重なっているときにも

$$\forall x\, (\forall x\, P) = \forall x\, \forall x\, P = \forall x\, P$$
$$\exists x\, (\exists x\, P) = \exists x\, \exists x\, P = \exists x\, P$$

である．ただし，$\forall$ と $\exists$ の組み合わせで量化の対象となる個体変項が異なる場合には，一般に

$$\forall x\, \exists y\, P \neq \exists y\, \forall x\, P$$

である．もちろんある特殊な場合では，等しくなることもある．等しい場合，そうでない場合の特性についてはおいおい出会うことになる（だろう）．

9.6　置換の表記方法

これからさまざまな局面で利用することになる個体変項の置換の表記方法とその約束を，あらかじめまとめておくことにする．

▷ 個体変項の置換の表記方法

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は異なる個体変項である
- $t_1, t_2, \ldots, t_n$ は項である
- x_i と t_i は同じではない

という属性と関係が x_i と t_i にあるとき，すべての束縛されていない個体変項すなわち自由変項 x_i を，それぞれ同時に（いっぺんに）t_i に置換する操作を

$$\left[t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\right]$$

と書く[*9] [*10]．この約束の上では，置換元の個体変項については $x_i \neq x_j$ でなくてはならないけれども，置換する項については $t_i = t_j$ であっても構わない．また，当然のことながら，t_i が x_i 以外の個体変項 $x_1, x_2, \ldots x_n$ のどれかであっても構わない．もちろん，個体定項 a, b などであってもかまわない．また置換の対象になっていない個体変項はそのまま残存する，ということがらも背後に隠れている．個体変項や自由変項のみの論理式での具体例は次の通り：

$$
\begin{aligned}
&x[a/x] = a \\
&x[t/x] = t \\
&x_i\big[t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\big] = t_i \\
&y\big[t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\big] = y \\
&p(x)\big[a/x\big] = p(a) \\
&p(x_i)\big[t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\big] = p(t_i) \\
&q(y)\big[t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\big] = q(y) \\
&((p(x) \wedge q(y)) \vee r(x))\ \big[t_x/x, t_y/y\big] = (p(t_x) \wedge q(t_y)) \vee r(t_x)
\end{aligned}
$$

量化子による束縛がある場合の簡単な例は次の通り：

$$
\begin{aligned}
&\forall x\, p(x)\big[t/x\big] = \forall x\, p(x) \\
&\forall x\, p(x) \vee q(y)\big[a/x, b/y\big] = \forall x\, p(x) \vee q(b) \\
&\forall x\, (p(x) \vee q(y))\big[t_x/x, t_y/y\big] = \forall x\, (p(x) \vee q(t_y)) \\
&p(x) \wedge \exists y\, q(y)\big[a/x, b/y\big] = p(a) \wedge \exists y q(y) \\
&p(x) \wedge \exists y\, q(y)\big[t_x/x, t_y/y\big] = p(t_x) \wedge \exists y q(y) \\
&((p(x) \vee r(y) \wedge \exists y\, q(y))\ \big[t_x/x, t_y/y\big] = (p(t_x) \vee r(t_y)) \wedge \exists y q(y)
\end{aligned}
$$

[*9] 7.2 (p.65) 節の双対性定理で，原子命題の置き換えについて，この記号を使った．

[*10] この置換操作を文字列一般に対しても敷衍しておく．文字列というものを，日本語文字，英語文字，ギリシャ文字，数学記号，空白などなどを含むひと繋がりのものであると決める．通常それは string と呼ばれるので，文字列を総称し，かつ，代表するものとして STRING とあらわすことにする．そして，STRING に含まれる a を A に変える操作を

$$\mathrm{STRING}\big[A/a\big]$$

とあらわすことにする．置換の操作が及ぶ範囲が紛らわしい場合には，適宜括弧をもちいて $(\mathrm{STRING})\big[A/a\big]$ のように明確化する．

話がややこしくならないように，ここでは，１文字を１文字に置換する場合のみを考える．複数文字からなる文字列を，別の複数文字からなる文字列に置換すること，例えば abc を $XYZUVW$ と置換することもよくあるが，それは $A := abx$，$X = XYZUVW$ であると考えれば，１文字の置換と同等である．

その際の留意点は，STRING に複数の a があった場合には，すべて一斉に A に置換しなければならないと言うことである．$\mathrm{STRING} = abcdefgabcabc$ であるときには

$$\mathrm{STRING}\big[A/a\big] = abcdefgabcabc\big[A/a\big] = AbcdefgAbcAbc$$

というようにするのである．

次に，[ ] の中には，複数の置換が表記できるものとする．こんな感じである：

$$\mathrm{STRING}\big[A/a, B/b, C/c\big] = abcdefgabcabc\big[A/a, B/b, C/c\big] = ABCdefgABCABC\ .$$

したがって，a と b の入れ替えは次のようになる：

$$\mathrm{STRING}\big[b/a, a/b\big] = abcdefgabcabc\big[b/a, a/b\big] = bacdefgbacbac\ .$$

最後に，STRING の中に置換対象の文字が含まれていない場合には，当然であるが，何も作用しないことになる：

$$\mathrm{STRING}\big[X/x\big] = abcdefgabcabc\big[X/x\big] = abcdefgabcabc\ .$$

ゆえに

$$\mathrm{STRING}\big[A/a, B/A\big] = abcdefgabcabc\big[A/a, B/A\big] = AbcdefgAbcAbc\ .$$

もとの STRING に含まれている，いない，が注意点である．いったん置換した後に，置換対象の文字があらわれても，それは置換されないとするのである（上の最後の例を参照）．

▷ admissible

論理式によっては，置換 $\left[t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\right]$ の結果が思わぬ作用を及ぼすことがあるので，置換を用いる際には留意が必要である．先走った例であるけれど，論理式 $\exists y\,(\neg(x=y))$ というものを考えてみる．この論理式の意味は「$x \neq y$ となる y が存在する」ということであり，x は自由変項，y は束縛変項である．ここで，すでに束縛されている変項 y での置換 $[y/x]$ を施すと（y も項であるから，この置換は許される）

$$\exists y\,(\neg(x=y))[y/x] = \exists y\,(\neg(y=y))$$

となり，その意味が「$y \neq y$ となる y が存在する」ということに変化してしまう．通常の数学ではこのような y はありえないし，そもそも自由変項を含む論理式（それは一般に真偽が決まらない）が，真偽のさだまる命題に変化してしまっている．無邪気に置換を適用してしまうときの落とし穴である．もちろん別の名前での置換

$$\exists y\,(\neg(x=y))[w/x] = \exists y\,(\neg(w=y))$$

では問題ない．

上で見たように，置換 $\left[t/x\right]$ によって，置換した項 t が束縛されてしまうと，論理式の意味が変わってしまうことがあることがわかった．逆に，置換のやりようによっては，意味が変化しないようにすることが可能であることもわかった．その区別を，admissible*11 という単語で示す．論理式の意味が変わらないものを admissible というのである．すなわち

$\exists y\,(\neg(x=y))[w/x]$ は admissible である．
$\exists y\,(\neg(x=y))[y/x]$ は admissible ではない．

▷ 束縛変項の置換

先の例 $\forall x\,(p(x) \vee (\exists y\,q(y) \wedge \exists z\,r(y)))$ では，結局のところ自由変項は，$\exists z\,r(y)$ という論理式の y のみであった．ならばということで，束縛変項を別の文字に変えてしまえば見やすくなるし，紛れはなくなるのではないかと思うのが素直である．紛らわしいのは，束縛変項の y と自由変項の y であるから，束縛変項となっている y に別の個体変項の記号 w を使うことにすれば，

$$\forall x\,(p(x) \vee (\exists w\,q(w) \wedge \exists z\,r(y)))$$

となって明解になる*12．

このように束縛変項の名前を変えることを，α 変換または α 同値と呼ぶらしい．λ 算法の世界でよく使われる用語のようである*13．

*11 認容的，許容的，という日本語があるようだが，どうもしっくりとこない．

*12 $\left[\cdots\right]$ という記号をつかうと，これは自由変項のみを置換するものであるから

$$(\forall x\,(p(x) \vee (\exists y\,q(y) \wedge \exists z\,r(y))))\left[w/y\right] = \forall x\,(p(x) \vee (\exists y\,q(y) \wedge \exists z\,r(w)))$$

となって，ちがう置換結果になる．これは，どうも α 変換とは言わないようである．ただ，見やすさ，紛れの可能性の低さ，と言う観点では同等のものになると言っても良いだろう．

*13 そういえば定積分の被積分関数と積分変数の関係においても，$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$ のように積分変数記号を変えても問題がなかったのであった．これは，積分変数に束縛されているから α 同値なのである，というような物言いになるのであろうか？

第 10 章

意味論 —— イントロダクション

一階述語論理の論理式について，その真偽を定めることを意味論という．

命題論理においては，命題の真偽は，原子命題に対する真理値割り当て関数というものからあたえられるものとした．真理値割り当て関数については，特別な属性やルール，制約は存在しなかった．T, F を割り振るものであればなんでもよかった．

命題論理に比べると，述語論理の論理式は，量化子という構成要素が増えている．さらに，個体定項，個体変項という項が加えられている．なので，真偽の定め方も複雑になると想像される．そのような状況で，日常言語での用いられ方を可能な限り損なうことなく真偽を定めるには，どのように定式化すればよいか．それを考察していく．

イントロダクションとして，意味論の概観を見ていくのがこの章である．

10.1 論理式の具象化

構文論のところで導入した MPL の論理式について，真偽を定めることを考える．そのためには，論理式を構成する要素である項，述語，論理定項などのあらわす意味を明確にすることが必要である．明確化の道具として，集合論の力を借りる[*1]．

まず最初に浮かぶ課題は，個体定項とはなんであるか，である．次に，述語であらわされるものの意味は何か，だ．そして個体変項というように変化するものを使うのだから，その変化の範囲を明らかにすることも必要だ．いや，そもそも一体何について考察しているのか，考察の対象は何なのか，を明らかにすることが最も必要だろう．それらをまとめて，「解釈」という名前をつけて具象化する．

10.1.1 「解釈」とは

考察の対象世界，往々にして「議論領域（domain of discource)」とも呼ばれる世界を，集合 $\mathbb{D}$ であらわす．そして解釈というものを，次のように定義する．

定義 10.1. 解釈の定義

- 議論領域の集合を $\mathbb{D}$ とする．これが個体変項が変化する（動き回る）範囲である．つまり，個体変項には $\mathbb{D}$ の全ての要素を代入できるのである．$\mathbb{D}$ の要素を，個体と呼ぶこともある．
- 個体定項には $\mathbb{D}$ の要素を割り当てる．
- 述語 p に対しては，$\mathbb{D}$ の部分集合を割り当てる．

述語が議論領域の部分集合であるということには，若干の戸惑いがあるかもしれない．おいおい明らかになっていくことであろう．

[*1] このような場合の考察道具として，集合論は強力である．数学者たちが「楽園」と呼んだのもうなずけることである．

この定義において,「割り当てる」という行為が示されている．これも，集合論と相性の良い関数という概念を援用して，具象化する．付値関数という名前にして，次のように決める．

定義 10.2. 付値関数 V^p, V^c の定義

- V^p は，述語 p について $\mathbb{D}_p \subseteq \mathbb{D}$ となる $\mathbb{D}$ の部分集合 $\mathbb{D}_p$ を与える関数として働く．すなわち

$$V^p : p \longmapsto \mathbb{D}_p \subseteq \mathbb{D} \ .$$

簡略化して $\mathbb{D}_p = V^p(p)$ とも書く．

- V^c は，個体定項 a について $\mathbb{D}$ の要素 d_a を割り当てる関数として働く[*2].

$$V^c : a \longmapsto d_a \in \mathbb{D}$$

簡略化して $d_a = V^c(a)$ とも書く．

10.1.2 「モデル」とは

解釈は，$\mathbb{D}$ と V^p, V^c を定めることによって，決まる[*3]．したがって，つねに $\mathbb{D}$ と V^p, V^c の三組みで解釈というものを考えていく必要がある．この三組み $\langle \mathbb{D}, V^p, V^c \rangle$ をモデル M と呼び

$$M = \langle \mathbb{D}, V^p, V^c \rangle = \text{モデル}$$

と書くことにする．$\mathbb{D}$ が異なれば，付値関数 V^p, V^c もことなることが予想されるので，当然モデルも異なるものとなるだろう．したがって特定のモデルであることを明示的に記す必要がある場合には，若干煩わしいが，次のようにそれを記すことにする．

$$M = \langle \mathbb{D}, V^p_M, V^c_M \rangle = \text{モデル}$$

このモデルのもとで，論理式についての真偽（T, F）を，ここで暫定的に以下のようにとりきめる．この暫定的定義は，いままでの流れからして，自然で素直なものであるとおもう．

暫定的定義 10.1. 閉論理式の真理値

(1) 個体定項に対する述語の真偽

$p(a)$ が真である $\Leftrightarrow V^c(a) \in \mathbb{D}_p$

$p(b)$ が偽である $\Leftrightarrow V^c(b) \notin \mathbb{D}_p$

(2) 個体変項に対する述語の真偽[*4]

$p(x)$ が真である $\Leftrightarrow V^c(x) \in \mathbb{D}_p$

$p(x)$ が偽である $\Leftrightarrow V^c(x) \notin \mathbb{D}_p$

(3) $\forall x\, p(x)$ の真偽

すべての $x \in \mathbb{D}$ にたいして，$p(x)$ が真のとき，真である．

それ以外の場合，すなわち，ある $y \in \mathbb{D}$ があって $p(y)$ が真ではないとき，偽である．

(4) $\exists x\, p(x)$ の真偽

すくなくともあるひとつの $x \in \mathbb{D}$ があって $p(x)$ が真のとき，真である．

上記以外，すなわち，$p(y)$ を真とする $y \in \mathbb{D}$ が存在しない場合は，偽である．

[*2] 個体定項を直截的に $\mathbb{D}$ の要素としないところの意図は，おそらく，$\mathbb{D}$ の要素は MPL の語彙ではないからであると思われる．確かに，$a \in \mathbb{D}$ のように個体定項それ自身が $\mathbb{D}$ の要素であるとしてしまえば，複雑さが減るし，見通しも良くなる気がする．けれども，全ての $\mathbb{D}$ の要素が MPL の個体定項であるという保証もない．なので,「迂回」的に対応関係を関数化しているのであると想像している．いやまてよ，モデルにおける個体定項って，その実体はなんなんだ？

[*3] 一意に決まるのかどうか，個人的にはまだ確証はない．

[*4] 実は，この定義はインチキである．V^c は個体定項に $\mathbb{D}$ の要素を割り当てる関数であった．それを個体変項に適用して良い理由は，今のところないのである．暫定的定義ということの由縁である．

(5) 一般の閉論理式 P の真偽

論理定項の結合子の働きの下で‥‥と書きたいところであるが，一般の閉論理式 P の場合について，掘り下げて考える必要がある．けれどもいまはまだ準備ができていないので，ここでは深入りしないことにする．なので，暫定的な定義なのである．

戸田山教科書が使っている例で確認する．M_1 と M_2 を次のように作成する．

モデル M_1

(1) $\mathbb{D} = \{ ◯, □, △ \}$
(2) 述語 p, q に $V^p_{M_1}$ を作用させた結果
- $V^p_{M_1}(p) = \mathbb{D}_{M_1,p} = \{ □, △ \}$
- $V^p_{M_1}(q) = \mathbb{D}_{M_1,q} = \{ ◯, △ \}$

(3) 個体定項 a, b に $V^c_{M_1}$ を作用させた結果
- $V^c_{M_1}(a) = □$
- $V^c_{M_1}(b) = ◯$

モデル M_2

(1) $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ （自然数の集合）
(2) 述語 p, q に $V^p_{M_2}$ を作用させた結果
- $V^p_{M_2}(p) = \mathbb{D}_{M_2,p} =$ 偶数の集合
- $V^p_{M_2}(q) = \mathbb{D}_{M_2,q} =$ 奇数の集合

(3) 個体定項 a, b に $V^c_{M_2}$ を作用させた結果
- $V^c_{M_2}(a) = 7$
- $V^c_{M_2}(b) = 8$

M_1 のもとでは，$V^c_{M_1}(a) = □$ である．したがって，$V^c_{M_1}(a) \in \mathbb{D}_{M_1,p}$ であり，$V^c_{M_1}(a) \notin \mathbb{D}_{M_1,q}$ である．結果，$p(a)$ は T であり，$q(a)$ は F となる．同様にして，$p(b)$ は F であり，$q(b)$ は T である．

M_2 のもとでは，$V^c_{M_1}(a) = 7$ である．したがって，$V^c_{M_2}(a) \notin \mathbb{D}_{M_2,p}$ であり，$V^c_{M_2}(a) \in \mathbb{D}_{M_2,q}$ であるから $p(a)$ は F であり，$q(a)$ は T である．同じようにして，$p(b)$ は T であり，$q(b)$ は F となる．

$\forall x\, p(x)$ はどうか？ M_1, M_2 ともに，議論領域の要素 x で，述語から作り出される部分集合 $\mathbb{D}_{M_1,p}, \mathbb{D}_{M_2,p}$ の要素にはなっていないものがある．よって $\forall x\, p(x)$ は偽である．同様に，$\forall x\, q(x)$ についても，M_1, M_2 のもとではともに偽である．

いっぽうで，$\exists x\, p(x)$ を考えると，M_1 では，□, △ は $\mathbb{D}_{M_1,p}$ の要素であるから，真となる．M_2 では，$2 \in \mathbb{D}$ であり $2 \in \mathbb{D}_{M_2,p}$ でもあるから，真となる．$\exists x\, q(x)$ も似たような事実が見て取れるので，M_1, M_2 のもとでともに真である．

では，$\exists x\,(p(x) \wedge q(x))$ という閉論理式はどうか？まず，$(p(x) \wedge q(x))$ というものの扱いに迷う．これは，今の定義で言えば，述語ではないので，定義 10.1 (p.87) の述語に対する部分集合をもとめることはできない[*5]．しからば，ということで，次章以下で検討する内容を少し先取りしてしまう．$\wedge$ で結ばれているので，述語 p と述語 q の部分集合の積集合であると考えてしまうのである．したがって，M_1 ではこの論理式は「$\{ □, △ \}$ の要素であり，かつ，$\{ ◯, △ \}$ の要素でもあるものが，$\mathbb{D}$ にある」ということで，△ 自身がこれに該当するから，T となる．M_2 では「偶数の集合の要素であり，かつ，奇数の集合の要素でもあるものが，$\mathbb{D}$ にある」ということであって，そんなものは（数論によれば）自然数の中には存在しないので，F であるということになる．というわけで，論理式の形式が同じでも，モデルによって真理値の結果はことなることがあるのである（これを言いたいために，議論の先取りをしたといってもいい）．

これから，暫定的定義 10.1 (p.88) の暫定性をなくしていかねばならない．明らかにすべきことは，

- 個体変項に対する述語 $p(x)$ の真偽の決定
- 上の拡張として $\neg q(x)$，$p(x) \wedge q(x)$ などの開論理式の真偽の決定
- $Qx\,(p(x) \wedge q(x))$ や $Qx\,(p(x) \leftrightarrow q(x))$，$Qx\,((p(x) \wedge q(x)) \vee r(x))$ などのような，結合子で結びつけられた閉論理式の真偽の決定

である．検討を始めよう．

[*5] いや，これも述語と見てしまえばいいではないか，という考え方もありだと思う．それについては，真理集合のところで再度考える．

第 11 章

意味論その１—— 閉論理式のみでの構築

閉論理式のみで意味論を構築していく様を学ぶ．モデル $M = \langle \mathbb{D}, V^p, V^c \rangle$（10.1 (p.87) 節参照）のもとでの真理値の考察その１である．

11.1 要請される事柄

閉論理式の真理値をどのように決定するかという事柄を考えるまえに，順序を逆にして，仮に閉論理式に真理値が割り振られていたらどうなのか，ということを考えてみる．閉論理式に真理値が割り振られているのだから，その閉論理式は命題として扱えるはずである．つまり，3.3 (p.16) 節で見た，命題論理での真理値の割り当てと真理表が適用できることになる．

閉論理式の真理値を与える関数 V^f を用意する．図式は

$$V^f : A \longmapsto \{\, T, F \,\} \ .$$

もちろん，A は閉論理式（の図式記号）である．これは，命題論理での真理値割り当て関数と非常によく似ている．対象が述語論理の論理式であるところだけが異なっていると見て良い．さて，この V^f によって真理値が割り当てられるのだから，命題論理と同様に，次の条件を課すことにする．

条件 11.1. C1: 結合子で結びつけられた閉論理式の真理値

(1) $V^f(A) = T$ のときには $V^f(\neg A) = F$.
　$V^f(A) = F$ のときには $V^f(\neg A) = T$.
(2) $V^f(A) = T$, $V^f(B) = T$ のときには $V^f(A \wedge B) = T$.
　それ以外のときには $V^f(A \wedge B) = F$.
(3) $V^f(A) = F$, $V^f(B) = F$ のときには $V^f(A \vee B) = F$.
　それ以外のときには $V^f(A \vee B) = T$.
(4) $V^f(A) = T$, $V^f(B) = F$ のときには $V^f(A \to B) = F$.
　それ以外のときには $V^f(A \to B) = T$.
(5) $V^f(A) = V^f(B)$ のときには $V^f(A \leftrightarrow B) = T$.
　それ以外のときには $V^f(A \leftrightarrow B) = F$.

この条件を課すことによって，命題論理の時と同じように

系 11.1. C1': C1 に付随する系

$$
\begin{aligned}
V^f(\neg A) &= \neg V^f(A) \\
V^f(A \wedge B) &= V^f(A) \wedge V^f(B) \\
V^f(A \vee B) &= V^f(A) \vee V^f(B) \\
V^f(A \to B) &= V^f(A) \to V^f(B) \\
V^f(A \leftrightarrow B) &= V^f(A) \leftrightarrow V^f(B)
\end{aligned}
$$

が成り立つことになる．結合子で結びつけられた閉論理式の真理値についての要請ともいえる．

さて，この V^f はどのようなものであるか，いかようなものとして定義すれば辻褄があうのか，などなどの詳細を詰めていくことが，意味論の骨格である．

11.2 個体定項についての述語の真理値

原子論理式は，τ を項，$\phi(\cdot)$ を述語として，$\phi(\tau)$ とあらわされるものであった．この原子論理式が閉論理式となるのは，個体定項についての述語の場合だけだから，まず $\phi(\alpha)$ ついての V^f を定義する．

定義 11.1. T1: 閉じた原子論理式の真理値

$$
\begin{aligned}
V^f(\phi(\alpha)) = T &\Leftrightarrow V^c(\alpha) \in \mathbb{D}_\phi \\
V^f(\phi(\alpha)) = F &\Leftrightarrow V^c(\alpha) \notin \mathbb{D}_\phi
\end{aligned}
$$

この $\mathbb{D}_\phi$ は，述語 ϕ によって作られる $\mathbb{D}$ の部分集合であることはいうまでもなかろう．

11.3 量化子を原子論理式に限定し，かつ，閉論理式に限定した世界

ここで，原子論理式に量化子がつき，かつそれが閉論理式である $Q\xi\,\phi(\xi)$ という形式の論理式のみを扱うことにしてみる．ϕ は付値関数 V^p の働きによって $\mathbb{D}$ の部分集合 $\mathbb{D}_\phi$ を定めることになる．この $Q\xi\,\phi(\xi)$ という形式を，便宜上「原子閉量化論理式」と名付けておく．この原子閉量化論理式に真理値をあたえる関数を V_0^f として，次のように定義する：

定義 11.2. T2: 原子閉量化論理式の真理値

(1) $A := \forall\xi\,\phi(\xi)$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_0^f(A) = T &\Leftrightarrow \mathbb{D}\text{ に属する全ての個体（つまりすべての要素）}d\text{ について }d \in \mathbb{D}_\phi \\
&\Leftrightarrow \mathbb{D}_\phi = \mathbb{D}
\end{aligned}
$$

(2) $A := \exists\xi\,\phi(\xi)$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_0^f(A) = T &\Leftrightarrow \mathbb{D}\text{ に属する個体のうち，少なくともひとつの }d\text{ について }d \in \mathbb{D}_\phi \\
&\Leftrightarrow \mathbb{D}_\phi \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

これは，暫定的な定義 10.1 (p.88) の (3),(4) で採用していたものである．

▷ 具体例

先に見た 2 つのモデル

モデル M_1

(1) $\mathbb{D} = \{\bigcirc, \square, \triangle\}$

(2) 述語 p, q に $V^p_{M_1}$ を作用させた結果

- $V^p_{M_1}(p) = \mathbb{D}_{M_1,p} = \{\square, \triangle\}$
- $V^p_{M_1}(q) = \mathbb{D}_{M_1,q} = \{\bigcirc, \triangle\}$

(3) 個体定項 a, b に $V^c_{M_1}$ を作用させた結果

- $V^c_{M_1}(a) = \square$
- $V^c_{M_1}(b) = \bigcirc$

モデル M_2

(1) $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ （自然数の集合）

(2) 述語 p, q に $V^p_{M_2}$ を作用させた結果

- $V^p_{M_2}(p) = \mathbb{D}_{M_2,p} =$ 偶数の集合
- $V^p_{M_2}(q) = \mathbb{D}_{M_2,q} =$ 奇数の集合

(3) 個体定項 a, b に $V^c_{M_2}$ を作用させた結果

- $V^c_{M_2}(a) = 7$
- $V^c_{M_2}(b) = 8$

で確認してみる．

まず，T1（定義 11.1 (p.91)）について．$V^c(a), V^c(b)$ の結果は構成されたモデルによって決められているので，このモデルの記述通りと受け取るしかない．そして，M_1 の場合には

$$V^c_{M_1}(a) = \square \in \mathbb{D}_{M_1,p}, \quad V^c_{M_1}(a) = \square \notin \mathbb{D}_{M_1,q}$$
$$V^c_{M_1}(b) = \bigcirc \in \mathbb{D}_{M_1,q}, \quad V^c_{M_1}(b) = \bigcirc \notin \mathbb{D}_{M_1,p}$$

であるから

$$V^f_{M_1}(p(a)) = T, \quad V^f_{M_1}(q(a)) = F$$
$$V^f_{M_1}(p(b)) = F, \quad V^f_{M_1}(q(b)) = T$$

となる．M_2 の場合も同様の考え方を適用すれば

$$V^f_{M_2}(p(a)) = F, \quad V^f_{M_2}(q(a)) = T$$
$$V^f_{M_2}(p(b)) = T, \quad V^f_{M_2}(q(b)) = F$$

となる[*1]．

つぎに，T2（定義 11.2 (p.91)）を見てみる．$\forall x\, p(x)$ は M_1, M_2 ともに

$\mathbb{D}_{M_1}$ に属する全ての個体（つまりすべての要素）d について $d \in \mathbb{D}_{M_1,p}$ とはなっていない
$\mathbb{D}_{M_2}$ に属する全ての個体（つまりすべての要素）d について $d \in \mathbb{D}_{M_2,p}$ とはなっていない

ので，どちらの場合でも $V^f_0(\forall x\, p(x)) \neq T$，いいかえれば $V^f_0(\forall x\, p(x)) = F$ である．$\forall x\, q(x)$ についても同様で，$V^f_0(\forall x\, q(x)) \neq T \;\Leftrightarrow\; V^f_0(\forall x\, q(x)) = F$ である．

$\exists x\, p(x), \exists x\, q(x)$ については M_1, M_2 ともに

$\mathbb{D}_{M_1}$ に属する個体 d で $d \in \mathbb{D}_{M_1,p}$ となるものは存在している
$\mathbb{D}_{M_1}$ に属する個体 d で $d \in \mathbb{D}_{M_1,q}$ となるものは存在している
$\mathbb{D}_{M_2}$ に属する個体 d で $d \in \mathbb{D}_{M_2,p}$ となるものは存在している
$\mathbb{D}_{M_2}$ に属する個体 d で $d \in \mathbb{D}_{M_2,q}$ となるものは存在している

となっているので

$$V^f_0(\exists x\, p(x)) = T \;\Leftrightarrow\; V^f_0(\exists x\, p(x)) \neq F$$
$$V^f_0(\exists x\, q(x)) = T \;\Leftrightarrow\; V^f_0(\exists x\, q(x)) \neq F$$

である．

▷ 命題論理化

ここまでで見てきたように，論理式を

[*1] $V^c_{M_2}(a) = 7 \in \mathbb{D}_{M_1,q}$, $V^c_{M_2}(a) = 7 \notin \mathbb{D}_{M_1,p}$ であり，$V^c_{M_2}(b) = 8 \in \mathbb{D}_{M_1,p}$, $V^c_{M_1}(b) = 8 \notin \mathbb{D}_{M_1,q}$ であるからである．

- 個体定項に対する述語 $\phi(\alpha)$
- 原子閉量化論理式 $Q\xi\,\phi(\xi)$

に限定して，そのうえでそれらの論理式に対する真理値を T1（定義 11.1 (p.91) ），T2（定義 11.2 (p.91) ）のように定義した．そしてその定義を満たす真理値割り当て関数を V_0^f と書くことにしてきた．この論理式の世界では，すべての論理式にたいして真理値が決定できることになるので，論理式それ自体を命題と見做すことが可能になる．したがって，命題論理でのもろもろが適用できることになる．それゆえ，条件 11.1 (p.90) も満たされることは明らかである．

実際，

$$V_0^f(p(a) \wedge p(b)) = V_0^f(p(a)) \wedge V_0^f(p(b))$$
$$V_0^f(p(a) \wedge q(b)) = V_0^f(p(a)) \wedge V_0^f(q(b))$$

であり

$$V_0^f(\forall x\, p(x) \vee q(b)) = V_0^f(\forall x\, p(x)) \vee V_0^f(q(b))$$

であるし

$$V_0^f(\forall x\, p(x) \wedge \forall x q(x)) = V_0^f(\forall x\, p(x)) \wedge V_0^f(\forall x q(x))$$
$$V_0^f(\forall x\, p(x) \vee \exists y q(y)) = V_0^f(\forall x\, p(x)) \vee V_0^f(\exists y q(y))$$

のように，各々の真理値に分解することによって，複合的な論理式全体の真理値を求めることができることになったのである．

このように論理式が一定の条件をつけて限定されている世界での論理式の真理値の決定については，ここまでの考察で十分である．けれども，それだけでは世界が小さすぎる．やはり $\exists x\,(p(x) \wedge q(x))$ や $\forall x\,(p(x) \to q(x))$ のようなものにも真理値を与えたい．量化子を外したときの論理式が，原子論理式ではない場合（結合子で結びつけられた複合形の場合）を検討しなければならないのである．

11.4 一般的な量化子のついた閉論理式をも対象とする世界

原子閉量化論理式の真理値を与える関数を V_0^f としたので，一般的な量化子付きの閉論理式の真理値を与える関数を V_1^f とあらわし，それがどのようなものであればいいのかを考察する．この V_1^f は V_0^f の性質を含んでいること，すなわち，V_0^f の拡張であるべきだろう．そうすることによって，統一的な真理値割り当て関数を手に入れることができるようになると思われる．なお，個体定項に対する原子論理式については，V_0^f と V_1^f に違いはないものとする．どちらでも T1（定義 11.1 (p.91) ）は成り立つとするのである．あくまでも，量化子のついた論理式に対しての真理値の割り当てについての区別とする．

$V_1^f(\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) = T$ となっている場合を想定する．ここにあらわれる論理式の意味は

すべての x について，$p(x) \wedge q(x)$ である

という事柄，すなわち，個体変項 x にすべての個体をあてはめても $p(x) \wedge q(x)$ であるということであった．したがって，すべての $d \in \mathbb{D}$ について $p(d) \wedge q(d)$ が成り立つことになるから，$V_1^f(p(d) \wedge q(d)) = T$ であるということになる．

さて，$p(d)$ や $q(d)$ はどういうものであろうか？今のところ，$\mathbb{D}$ の要素 d に対する述語の真偽というものは定義されていない（うすうすわかっているけれど，正式なものは用意されていない）．いっぽう，個体定項 α は V^c の働きによって $V^c(\alpha) \in \mathbb{D}$ というように，個体が割り当てられるものであった．したがって

$$p(d) \wedge q(d) \text{ が成り立つ} \Leftrightarrow p(V^c(\alpha)) \wedge q(V^c(\alpha)) \text{ が成り立つ}$$

ということになる．ここで，個体定項から個体への翻訳 V^c の働きを省略してしまう．つまり $p(V^c(\alpha)) \wedge$

$q(V^c(\alpha)) = p(\alpha) \land q(\alpha)$ とみなしてしまうのである[*2]．それゆえ，最終的に

$$p(d) \land q(d) \text{ が成り立つ } \Leftrightarrow \ p(\alpha) \land q(\alpha) \text{ が成り立つ} \tag{11.1}$$

とすることができる．個体定項に対する真偽は T1（定義 11.1 (p.91)）で定めておいた．それゆえ，個体定項ですべてを定式化できれば，真偽が定められると予想できる．

このように，量化子のついた閉論理式を一旦個体定項に移して真理を決定する，という理路が，基本とする戦略である．

少なからずの隔靴掻痒感が否めないが，(11.1) (p.94) を認めた上で，V_1^f の定義化を試みる．なおここからは，論理式 B は ξ のみを個体変更とする複合的な論理式（原子論理式を結合子で結びつけたもの）であるとする．その個体変更を明示的にするために，$B(\xi)$ と書くことにする．それゆえ，$Q\xi\, B(\xi)$ が閉論理式であることがわかりやすくなるはずである．

定義 11.3. T3: 閉量化論理式の真理値

(1) $A := \forall\xi\, B(\xi)$ のとき
　　$V_1^f(A) = T \ \Leftrightarrow$ 全ての個体定項 α において $V_1^f(B(\xi)[\alpha/\xi]) = T$ である．

(2) $A := \exists\xi\, B(\xi)$ のとき
　　$V_1^f(A) = T \ \Leftrightarrow$ 少なくともひとつの個体定項 α について $V_1^f(B(\xi)[\alpha/\xi]) = T$ である．

上に書いた記号 $B(\xi)[\alpha/\xi]$ は，さきに構文のところ（9.6 (p.84) 節）でみた置換記号で，論理式 $B(\xi)$ の自由変項 ξ をすべて α に置き換えるということを示したものである．

このように定義した V_1^f は T2 で定義した V_0^f を含んでいるだろうか？ B を原子論理式 ϕ に置き換えれば (1) は

$$V_1^f(\forall\xi\, \phi(\xi)) = T \ \Leftrightarrow \ \text{全ての個体定項 } \alpha \text{ において } V_1^f(\phi(\xi)[\alpha/\xi]) = T$$

である．(2) は

$$V_1^f(\exists\xi\, \phi(\xi)) = T \ \Leftrightarrow \ \text{少なくともひとつの個体定項 } \alpha \text{ について } V_1^f(\phi(\xi)[\alpha/\xi]) = T$$

となる．ここで，実際に置換を施せば，$\phi(\xi)[\alpha/\xi] = \phi(\alpha)$ となり[*3]，かつ，個体定項に対する原子論理式については V_1^f と V_0^f の区別はないから

$$V_1^f(\phi(\xi)[\alpha/\xi]) = T \ \Leftrightarrow \ V_1^f(\phi(\alpha)) = T \ \Leftrightarrow \ V^c(\alpha) \in \mathbb{D}_\phi$$

であることになる．したがって，原子閉量化論理式に対する T3 は

(1') $V_1^f(\forall\xi\, \phi(\xi)) = T \ \Leftrightarrow$ 全ての個体定項 α において $V^c(\alpha) \in \mathbb{D}_\phi$

(2') $V_1^f(\exists\xi\, \phi(\xi)) = T \ \Leftrightarrow$ 少なくともあるひとつの個体定項 α において $V^c(\alpha) \in \mathbb{D}_\phi$

さて，T2 での定義を簡潔に記すと

(1'') $V_0^f(\forall\xi\, \phi(\xi)) = T \ \Leftrightarrow \ \mathbb{D}$ に属する全ての個体 d について $d \in \mathbb{D}_\phi \ \Leftrightarrow \ \mathbb{D}_\phi = \mathbb{D}$

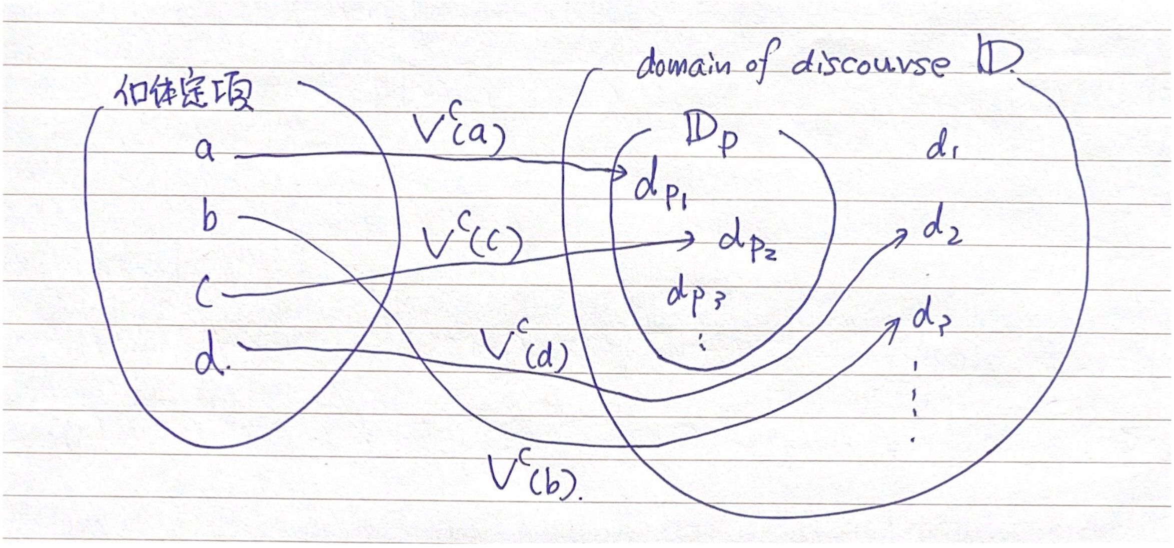
(2'') $V_0^f(\exists\xi\, \phi(\xi)) = T \ \Leftrightarrow \ \mathbb{D}$ に属する個体のうち，少なくともひとつの d で $d \in \mathbb{D}_\phi \ \Leftrightarrow \ \mathbb{D}_\phi \neq \varnothing$

---

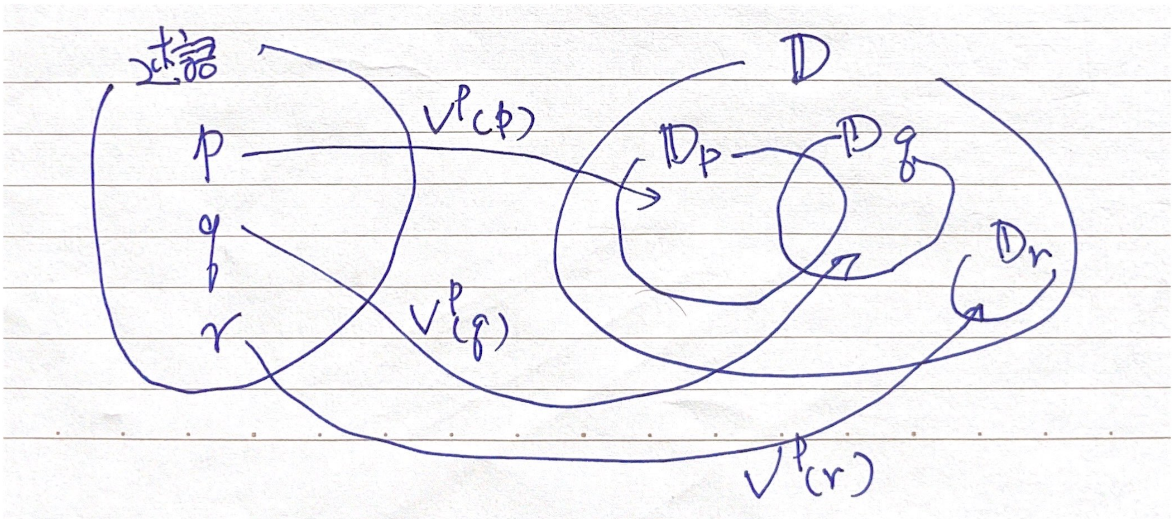
*2 「みなす」という論拠でいいのかどうか，自信はない．もうすこしきちんとした物言いがないだろうか？

*3 これは，原子論理式だから言えるの事柄であるはずである．原子論理式は，その内部に結合子を含まないので，$p(x)$ というような単純な形式でしかありえない．したがって，その形式の単純性から，$p(x)[a/x] = p(a)$ という形式が得られる．一方で，原子論理式でなくかつ内部に閉論理式を持っている場合，たとえば $B(x) := p(x) \lor \exists x\, q(x)$ のような場合には，束縛変項は置換の対象にはならないから，$B(x)[a/x] = p(a) \lor \exists x\, q(x)$ となる．これを $B(a)$ という形式であらわすことには抵抗がある．そう諒解しているのだが，どうだろうか？

この（1′）と（1″），（2′）と（2″）を各々同じものとするには，個体定項と個体がすべて１体１対応にあれば良いことになるのだが，はてさて．　ここに文章を書いてみる．たとえば述語論理とは，命題の内部に立ち入って論証の正しさを研究するものである．命題を，述語論理で項数が０の場合，というように考える流儀もあるが，ここでは，命題論理を土台にして構築される，という立場をとる．



ここにも何か文章を書いてみる．何某かの対象をさだめ，その対象の性質や対象間の関係を定めるための論理が述語論理である．もちろん，述語も意味をもつ．そして，述語は変項をもつ．変項に代入されるものと述語の意味によって，論理式の真理値が決まる．変項を利用して，命題に内部構造を持ち込む，という見方もできよう．



演習１

モデル M_1 を再度書きしるすと

モデル M_1

(1) $\mathbb{D} = \{\bigcirc, \square, \triangle\}$

(2) 述語 p, q に $V^p_{M_1}$ を作用させた結果

- $V^p_{M_1}(p) = \mathbb{D}_{M_1,p} = \{\square, \triangle\}$
- $V^p_{M_1}(q) = \mathbb{D}_{M_1,q} = \{\bigcirc, \triangle\}$

(3) 個体定項 a, b に $V^c_{M_1}$ を作用させた結果

- $V^c_{M_1}(a) = \square$
- $V^c_{M_1}(b) = \bigcirc$

であった．この M_1 での a 変種は

$$V^c_{M_1/a}(a) = \begin{cases} \bigcirc, \\ \square, \\ \triangle \end{cases}$$

の３種類である．真偽の判定の対象としている論理式は，個体定項 a を含んでいないから

$$\begin{aligned} & V^f_{M_1}(\forall x\,(p(x) \vee q(x))) = T \\ & \quad \Leftrightarrow\ M_1\text{のすべての } a \text{ 変種 } M_1/a \text{ について，} V^f_{M_1/a}(p(a) \vee q(a)) = T \end{aligned}$$

ということになる．$p(a), q(a)$ ともに閉論理式なので，C1'（系 11.1 (p.90) ）から

$$V^f_{M_1/a}(p(a) \vee q(a)) \ \equiv\ V^f_{M_1/a}(p(a)) \ \vee\ V^f_{M_1/a}(q(a))$$

が導き出せるので

$$\begin{aligned} V^f_{M_1/a}(p(a) \vee q(a)) = T\ & \Leftrightarrow\ V^f_{M_1/a}(p(a)) = T\ \vee\ V^f_{M_1/a}(q(a)) = T \\ & \Leftrightarrow\ V^c_{M_1/a}(a) \in \{\square, \triangle\}\ \vee\ V^c_{M_1/a}(a) \in \{\bigcirc, \triangle\} \end{aligned}$$

となる．a 変種が３種類のうちのどれであろうと最終行の物言いは満たされているので，M_1 のすべての a 変種 M_1/a について，$V^f_{M_1/a}(\forall x\,(p(x) \vee q(x))) = T$ は成り立つ．つまり，モデル M_1 のもとで $\forall x\,(p(x) \vee q(x))$ は真なのである．それゆえ，モデル M_1 のもとで $\exists x\,(p(x) \vee q(x))$ が真になるのもあきらかである．

いっぽう，$\vee$ を $\wedge$ に変えてみると

$$\begin{aligned} & V^f_{M_1}(\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) = T \\ & \quad \Leftrightarrow\ M_1\text{のすべての } a \text{ 変種 } M_1/a \text{ について，} V^f_{M_1/a}(p(a) \wedge q(a)) = T \end{aligned}$$

であり，再び C1'（系 11.1 (p.90) ）から

$$V^f_{M_1/a}(p(a) \wedge q(a)) \ \equiv\ V^f_{M_1/a}(p(a)) \ \wedge\ V^f_{M_1/a}(q(a))$$

だから

$$\begin{aligned} V^f_{M_1}(\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) = T\ & \Leftrightarrow\ V^f_{M_1/a}(p(a)) = T\ \wedge\ V^f_{M_1/a}(q(a)) = T \\ & \Leftrightarrow\ V^c_{M_1/a}(a) \in \{\square, \triangle\}\ \wedge\ V^c_{M_1/a}(a) \in \{\bigcirc, \triangle\} \end{aligned}$$

となる．この場合は，a 変種が $\triangle$ のときにのみしか最終行の物言いは満たされない．したがって $V^f_{M_1/a}(\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) = F$ である．すなわち，モデル M_1 のもとで $\forall x\,(p(x) \wedge q(x))$ は偽なのである．逆に，a 変種を $\triangle$ に選べば，$V^c_{M_1/a}(a) \in \{\square, \triangle\}$ かつ $V^c_{M_1/a}(a) \in \{\bigcirc, \triangle\}$，は満たされるので，$\exists x\,(p(x) \wedge q(x))$ は真になる．つまり $V^f_{M_1/a}(\exists x\,(p(x) \wedge q(x))) = T$ なのである．

演習 2

モデル M

(1) $\mathbb{D} = \{1, 2, 3, 4\}$
(2) 述語 p, q に V_M^p を作用させた結果
- $V_M^p(p) = \mathbb{D}_{M,p} = \{1, 2\}$
- $V_M^p(q) = \mathbb{D}_{M,q} = \{1, 3\}$

(3) 個体定項 a, b に V_M^c を作用させた結果
- $V_M^c(a) = 1$
- $V_M^c(b) = 3$

- $\forall x\,(p(x) \vee q(x))$ は真か偽か
  a はこの論理式にあらわれていない個体定項であるから，論理式の真偽の定義により

$$V_M^f(\forall x\,(p(x) \vee q(x))) = T$$
$$\Leftrightarrow\ M \text{ のすべての } a \text{ 変種 } M/a \text{ について，} V_{M/a}^f(p(a) \vee q(a)) = T$$

である．そして，$p(a), q(a)$ ともに閉論理式であることと C1'（系 11.1 (p.90)）から

$$\begin{aligned} V_{M/a}^f(p(a)\ \vee\ q(a)) &\equiv V_{M/a}^f(p(a))\ \vee\ V_{M/a}^f(q(a)) \\ &\equiv V_{M/a}^c(a) \in \{1, 2\}\ \vee\ V_{M/a}^c(a) \in \{1, 3\}\ . \end{aligned}$$

さて，M の a 変種は 4 種類であり，その中には a に 4 を割り当てるものが存在する．それを M/a と書く．つまり，$V_{M/a}^c(a) = 4$．その場合には

$$V_{M/a}^c(a) \in \{1, 2\}\ \vee\ V_{M/a}^c(a) \in \{1, 3\} = 4 \in \{1, 2\}\ \vee\ 4 \in \{1, 3\}$$

となって，成立しないことがわかる．したがって，a 変種のうち a に 4 を割り当てるものについては $V_{M/a}^f(p(a) \vee q(a)) = T$ ではない．つまり，M のすべての a 変種 M/a について $V_{M/a}^f(p(a) \vee q(a)) = T$ とはなっていないから，$V_M^f(\forall x\,(p(x) \vee q(x))) = F$ である．言い換えると，M のもとで，$\forall x\,(p(x) \vee q(x))$ は偽である．
M の b 変種 M/b でやっても，同じ理路で，偽であることを示すことができる．

- $\exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x))$ は真か偽か
  a はこの論理式にあらわれていない個体定項であるから，論理式の真偽の定義により

$$V_M^f(\exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x))) = T$$
$$\Leftrightarrow\ M \text{ のすくなくともひとつの } a \text{ 変種 } M/a \text{ について，} V_{M/a}^f(p(a) \wedge \neg q(a)) = T$$

である．またいままで見てきたように，

$$\begin{aligned} V_{M/a}^f(p(a) \wedge \neg q(a)) &\equiv V_{M/a}^f(p(a))\ \wedge\ V_{M/a}^f(\neg q(a)) \\ &\equiv V_{M/a}^c(a) \in \{1, 2\}\ \wedge\ V_{M/a}^c(a) \in \{2, 4\} \end{aligned}$$

と変形できる[*4]．さて，M の a 変種は 4 種類であり，その中には a に 2 を割り当てるものが存在する．それを M/a と書く．つまり，$V_{M/a}^c(a) = 2$．すると，

$$V_{M/a}^c(a) \in \{1, 2\}\ \wedge\ V_{M/a}^c(a) \in \{2, 4\} = 2 \in \{1, 2\}\ \wedge\ 2 \in \{2, 4\}$$

[*4] 念の為．$V_{M/a}^p(q) = \{1, 3\}$ であるから $V_{M/a}^p(\neg q) = \{2, 4\}$ である．

となって成立しているしたがって，a 変種のうち a に 2 を割り当てるものについては $V^f_{M/a}(p(a) \wedge \neg q(a)) = T$ である．つまり，この a 変種 M/a については $V^f_M(\exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x))) = T$，言い換えると，$M$ のもとで，$\exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x))$ は真である．
M の b 変種 M/b でやっても同じ理路で真であることが示される．

- $\forall x\,(q(x) \to p(x))$ は真か偽か

a はこの論理式にあらわれていない個体定項であるから，論理式の真偽の定義により

$$\begin{aligned}&V^f_M(\forall x\,(q(x) \to p(x))) = T\\ &\qquad \Leftrightarrow \ M \text{ のすべての } a \text{ 変種 } M/a \text{ について，} V^f_{M/a}(q(a) \to p(a)) = T\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}V^f_{M/a}(q(a) \to p(a)) &\equiv \neg V^f_{M/a}(q(a)) \ \vee \ V^f_{M/a}(p(a))\\ &\equiv V^f_{M/a}(\neg q(a)) \ \vee \ V^f_{M/a}(p(a))\\ &\equiv V^c_{M/a}(a) \in \{2,4\} \ \vee \ V^c_{M/a}(a) \in \{1,2\}\\ &\equiv V^c_{M/a}(a) \in \{1,2,4\}\end{aligned}$$

である．
さて，M の a 変種は4種類であり，それらは a に $1,2,3,4$ のどれかを割り当てるものである．したがって，3 が割り当てられたときには $V^c_{M/a}(a) \in \{1,2,4\}$ が成立しないので，M のすべての a 変種 M/a について $V^f_{M/a}(q(a) \to q(a)) = T$ であるとはいえない．つまり，$V^f_M(\forall x\,(q(x) \to p(x))) = F$，言い換えると，$M$ のもとで，$\forall x\,(q(x) \to p(x))$ は偽である．M の b 変種 M/b でやっても同様である．

ちなみに，$\forall x\,(p(x) \to q(x))$ の場合はどうだろうか？実際

$$\begin{aligned}V^f_{M/a}(p(a) \to q(a)) &\equiv \neg V^f_{M/a}(p(a)) \ \vee \ V^f_{M/a}(q(a))\\ &\equiv V^f_{M/a}(\neg p(a)) \ \vee \ V^f_{M/a}(q(a))\\ &\equiv V^c_{M/a}(a) \in \{3,4\} \ \vee \ V^c_{M/a}(a) \in \{1,3\}\\ &\equiv V^c_{M/a}(a) \in \{1,3,4\}\end{aligned}$$

となるから，a に 2 を割り当てる a 変種は，最後の式を満たさない．それゆえ，$\forall x\,(p(x) \to q(x))$ も偽となるのである．

- $\forall x\,(q(x) \to p(a))$ は真か偽か

個体定項 a はこの論理式にあらわれているいので，論理式の真偽の判定にはつかえない．b はこの論理式にあらわれていない個体定項であるから，b 変種は使える．論理式の真偽の定義により

$$\begin{aligned}&V^f_M(\forall x\,(q(x) \to p(a))) = T\\ &\qquad \Leftrightarrow \ M \text{ のすべての } b \text{ 変種 } M/b \text{ について，} V^f_{M/b}(q(b) \to p(a)) = T\end{aligned}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}V^f_{M/b}(q(b) \to p(a)) &\equiv \neg V^f_{M/q}(q(b)) \ \vee \ V^f_{M/b}(p(a))\\ &\equiv V^f_{M/q}(\neg q(b)) \ \vee \ V^f_{M/b}(p(a))\\ &\equiv V^c_{M/b}(b) \in \{2,4\} \ \vee \ V^c_{M/b}(a) \in \{1,2\}\end{aligned}$$

となるが，個体定項 a に割り当てられているのは 1 であるから $V^c_{M/b}(a) \in \{1,2\} = T$ である．それゆえ，上の式は T である．したがって，b にどの個体が割り当てられても T なので M のすべての b 変種 M/b についても $V^f_M(\forall x\,(q(x) \to p(a))) = T$，言い換えると，$M$ のもとで，$\forall x\,(q(x) \to p(a))$ は真である．

第 12 章

意味論 —— 真理集合を使って

述語の真理集合というものを考えて，それをもとに意味論を構築する試案.

参考文献

[1] Chin-Liang Chang and Richard Char-Tung Lee. 『Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving』. ACADEMIC PRESS,INC, 1987.

[2] V. Sperschnider and G. Antoniou. 『LOGIC A Foundation for Computer Science』. Addison-Wesley, 1991.

[3] 戸田山 和久. 『論理学をつくる』. 名古屋大学出版会, 2000. (第 3 刷 (2002) を参照した).

[4] 本橋 信義. 『新しい論理序説』. 朝倉書店, 1997. (第 2 刷 (1999) を参照した).