述語記号の使い方，定義，定理の書き方（私家版）

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2023 年 10 月 5 日

概要

述語記号の使い方，表記の整理．さらに，定義と命題の書き方への個人的見解．議論領域，対象領域，話題世界の整理．述語変数（述語変項），定数変数（個体定項），無名性・匿名性としての変数などなど．今学習中のロジックについての学習内容と極力整合していきたい．

Contents

第 1 章

論理式（Formula）の用意

1.1　部品（個体，項，述語，量化子）の用意

1.1.1　個体

個体とはなにか？天下り的であるが，例えば，落語家の固有名詞の集まりを考える．そして，そのなかのそれぞれを**個体**と呼ぶことにする．金原亭馬生，林家三平，柳家こさん，三遊亭円丈，柳亭左楽$\cdots$などなどはこの集まりのなかの個体である．そして，それらは同じものではない．金原亭馬生と林家三平は藝風が全く違う．またどんな話題であろうと，そこに出てくる柳家こさんは柳家こさんであって，三遊亭円丈に変えられないし，変わることもない．二人は流派も違う．これをいきなり一般化する．すなわち

> 何らかの考察の対象で，互いの区別がつき，文脈によって変わるようなことのないものひとうひとつを，個体と呼ぶことにする．

といいたいのだけれど，文章だけでは何だかあやふやだ（語彙力）．

いやまて．ちょいとした数学の話を書こうとしているのだから，ここはひとつ落語家の固有名詞のあつまりを「集合」と考えることにしよう．そうすれば，柳亭左楽という個体は，要素であると言えることになる．ということで，集合の言葉で書いてみれば

> 何らかの集合 $\mathbb{U}$ の要素ひとつひとつを個体と呼ぶことにする．

となる．いい感じではあるまいか．

そして，唯一無二に定まった個体，すなわち特定の $\mathbb{U}$ の要素，を「個体定項」と呼ぶことにする．慣習として，個体定項には，a, b, c などの文字を使う．また，複数の個体にあてはまるもの，というよりは，複数の個体をあてはめることを許すものを，「個体変項」と呼ぶ．これもまだるっこしい文章であるが，いいかえればすなわち $\mathbb{U}$ の中を動き回る変数である[*1]．個体変項には，x, y, z などの文字を使う．

1.1.2　項（term）

項（term）というものを次のように帰納的に定義する：

1. 個体変項は項である．
2. 個体定項は項である．
3. 以上の様にして得られるもののみが，項である．

[*1] このよくある数学的言い回しも，なんとはなしの奇妙な趣がある．動き回るってなんだよ．

1.1.3 述語（predicate）

項と並ぶもうひとつの基本的なものに「述語」がある．ここでは，まずはとっかかりであるから，1 項述語（述語はひとつの項しか持てないもの）としておく．この 1 項述語を $p(\cdot)$ というような記号であらわすと決めよう．その結果

- $p(a)$ は個体定項 a についての述語
- $p(x)$ は個体変更 x についての述語

ということになる．

留意するべきところは，$p(a)$ すなわち個体定項であれば，a が唯一無二のものであると定まっているので，真偽ははっきりするということである．「林家三平は落語家である」が真であるというように．一方，$p(x)$ については，x がなにであるか決まるまでは真偽ははっきりしない．「x は落語家である」ということが x の内容次第で真にも偽にもなる．x が「王貞治」であったら，「王貞治は落語家である」は，おそらく偽であるだろう（まさか王さんが落語の世界に入門するとは思えないので，その前提で）．

その意味で，$p(a)$ は命題であり，$p(x)$ は命題ではないのである[*2]．

1.1.4 量化子（quantifier）

$p(x)$ の真偽をはっきりさせるためのもうひとつの方法がある．「すべての個体変項について〜」とか「なかには〜となる個体変項ががある」という形のものである．これを，量化子（quantifier）と呼ばれる新たな記号 $\forall$ と $\exists$ を使って，次のように記号的に表現する．

$\forall x\, p(x)$ ： 「すべての x について $p(x)$ である」という事柄をあらわす．
個体変項 x にどんな個体定項をあてはめても．$p(x)$ が成り立つ，というメッセージを示している．もちろん，成り立つかどうかはまだ未定である．

$\exists x\, p(x)$ ： 「$p(x)$ である x が存在する」という事柄をあらわす．
すくなくともあるひとつの個体では $p(x)$ が成り立つ，というメッセージである．もちろんその個体が複数あっても良い．ひとつもない場合ももちろんあるだろう．

このようにすれば，個体変更 x 次第でどうにでもなるということが排除される．つまり真偽の決着がつく．したがって，これらは命題になる（のちに述べる閉論理式（1.4.2 (p.6) 節参照）になるからである）．

1.2 論理式（formula）の定義

ここまでで見てきた，ひとつの項しかもてない述語の世界に着目し，その世界での「言語」を MPL と名付けることにしよう（Mono Predicate Language と命名）．MPL は次の記号（語彙）で構成される：

項：

- 個体定項： $a, b, c, \cdots$

[*2] 命題と述語について簡単に記す．命題とは，真偽を決められる文であるとする．では，真偽が決まる文とはどういうものであろうか？（言語学的な素養は希薄であるわたくしであるから，間違っていたら勘弁してもらうことにして）ひとまず思い切り簡単化して

文 = S は P である

または数学味をつけて

文 = S は P を満たす（満足する）

あるいは思い切り簡略化して

文 = S は P

というように，文というものを規定することにしてしまおう．そしてこの S を主語，P を述語と呼ぶ（「P を満たす」のニュアンスをのこしたいのならば，P を条件と呼ぶのもありだ）．そのうえで，これらの文が真であるかどうか判断を下すのである．とここまでみてくると S が決まれば真偽も決まると思える．つまり S に具体的個別的なものを持ってくれば真偽がきまる．それが，個体定項ならば命題になる，ということの意味なのである．

- 個体変項： $x, y, z, \cdots$

述語： $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot), \cdots$ （小文字を用いる．前提したように，ここでは１項述語のみを考えている[*3]）

論理記号：

- 結合子： $\neg, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$
- 量化子： $\forall, \exists$

補助記号：(,)

語彙が定まったので，MPL の論理式を次のように定義する（MPL の文法である）．

1. $p(\cdot)$ が述語，τ が項であれば，$p(\tau)$ は論理式である．これを原子論理式と名付ける．
2. P が論理式であるならば，$(\neg P)$ も論理式である．
3. P, Q がともに論理式であるならば $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \longrightarrow Q), (P \longleftrightarrow Q)$ も論理式である．
4. P が論理式であり，ξ が個体変項であるならば，$\forall\xi\, P$，$\exists\xi\, P$ ともに論理式である．
5. 以上の様にして得られるもののみが，論理式である．

P, Q は MPL の語彙ではなく，メタ記号である．つまり，なんらかの論理式を代表しているもの．ξ も同様にメタ記号である．これは，個体変項を代表している．τ というメタ記号は，項（個体定項，個体変項）を代表する．また，$\forall$ と $\exists$ の両方をあらわしたい場合に $\mathcal{Q}$ というメタ記号が使われることもある．論理式の Q と混同しないようにしたい[*4]．

論理式の括弧の省略については，常識的なルール，すなわち混同を起こす恐れがない場合には省略するというルールをつかう．量化子についての括弧については

$$\mathcal{Q}\xi\,(\mathcal{Q}\zeta\, P) = \mathcal{Q}\xi\,\mathcal{Q}\zeta\, P$$

を認めることにする．括弧をもちいて，明示的にわかりやすくすることが最優先であることは，言うまでもない．

さらに，この記述については，いろいろな流儀流派がある．量化子の間に「,」を入れる流儀があって，その基では

$$\mathcal{Q}\xi\,\mathcal{Q}\zeta\,\mathcal{Q}\eta\, P = \mathcal{Q}\xi,\ \mathcal{Q}\zeta,\ \mathcal{Q}\eta\, P$$

となる．さらに加えて量化子の部分と論理式の間に「:」や「s.t.」(such that の略のようである．業界によっては，subject to の略であるらしい）を使う流儀もある：

$$\begin{aligned} &= \mathcal{Q}\xi,\ \mathcal{Q}\zeta,\ \mathcal{Q}\eta\ :\ P \\ &= \mathcal{Q}\xi,\ \mathcal{Q}\zeta,\ \mathcal{Q}\eta\ \text{s.t.}\ P \end{aligned}$$

P は論理式であるから，$P = \mathcal{Q}x\,\mathcal{Q}y\ R$ でもよいはずで，その場合には次のような入れ子構造になる：

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\xi\,\mathcal{Q}\zeta\,\mathcal{Q}\eta\ (\mathcal{Q}x\,\mathcal{Q}y\ R) &= \mathcal{Q}\xi,\ \mathcal{Q}\zeta,\ \mathcal{Q}\eta\ (\mathcal{Q}x,\ \mathcal{Q}y\ R) \\ &= \mathcal{Q}\xi,\ \mathcal{Q}\zeta,\ \mathcal{Q}\eta\ :\ (\mathcal{Q}x,\ \mathcal{Q}y\ :\ R) \\ &= \mathcal{Q}\xi,\ \mathcal{Q}\zeta,\ \mathcal{Q}\eta\ \text{s.t.}\ (\mathcal{Q}x,\ \mathcal{Q}y\ \text{s.t.}\ R)\ . \end{aligned}$$

1.3 量化子についてさらに

1.3.1 量化子のスコープ

論理式の形によっては，量化子で形容される範囲（スコープ）が判然としなくなることがある．そこで，括弧の力を借りて，スコープを確認しておく．

$$\forall x\,(P \wedge Q), \quad \exists x\,(P \wedge Q)$$

[*3] 記述の形式から，「引数がひとつしかない述語」ともいう．引数という単語，馴染みが薄い人たちがいるだろうなぁ．

[*4] 論理式が上のように定義されたことから，$p(a) \wedge q(x)$ も立派な論理式であることになる．さらに $\exists x\, p(a)$ や $\forall y\, p(x), \exists x \forall x\, p(x)$ なども論理式であることになる．これらをつじつまが合うようにどう捉えるか，については意味論を整備しなければならない．その意味論については，今学習中なのである．なのでそちらの学習の結果にゆずらせてください．本稿では，病的な論理式を扱うことはない（はず）なので，安心して良い（と思う）．

の $\forall x, \exists x$ は $P \wedge Q$ に及ぶが

$$\forall x\, P \wedge Q, \quad \exists x\, P \wedge Q$$

の $\forall x, \exists x$ は P にのみ及び，Q には影響しない．また，形式から容易に想像できるが，

$$P \wedge \forall x\, Q, \quad P \wedge \exists x\, Q$$

の $\forall x, \exists x$ は Q にのみ及び，P には影響しない．丁寧に書けば

$$\begin{aligned} \forall x\, P \wedge Q &= (\forall x\, P) \wedge Q, \quad P \wedge \forall x\, Q = P \wedge (\forall x\, Q) \\ \exists x\, P \wedge Q &= (\exists x\, P) \wedge Q, \quad P \wedge \exists x\, Q = P \wedge (\exists x\, Q) \end{aligned}$$

である．他の論理演算子についても同様である．

1.3.2 特殊な計算

同じ量化子が重なっているときには

$$\begin{aligned} \forall x\, (\forall x\, P) &= \forall x\, \forall x\, P = \forall x\, P \\ \exists x\, (\exists x\, P) &= \exists x\, \exists x\, P = \exists x\, P \end{aligned}$$

という計算ができる．

$\forall$ と $\exists$ の組み合わせで量化の対象となる個体変項が異なる場合には，一般に

$$\forall x\, \exists y\, P \neq \exists y\, \forall x\, P$$

である．もちろんある特殊な場合では，等しくなることもある．等しい場合，そうでない場合の特性についてはおいおい出会うことになる（だろう）．

1.4 自由変項と束縛変項，閉論理式

1.4.1 自由変項，束縛変項

量化子のスコープから，論理式の個体変項について，量化子の影響を受けているものとまったく影響を受けていないものという 2 種類の区別をつけることが可能になる．量化子の影響を受けている個体変項は束縛変項，影響を受けていないものは自由変項と呼ばれる．

論理式 $\forall x\, (p(x) \vee (\exists y\, q(y) \wedge \exists z\, r(y)))$ を題材にする[*5]．量化子のスコープと括弧の対応から，まず

$$A := p(x) \vee (\exists y\, q(y) \wedge \exists z\, r(y))$$

とすれば，元の論理式は

$$\forall x\, A$$

となるので，この $\forall x$ は A 全体に及んでいる．したがって x は，全体を通して，束縛変項である．またこの A は

$$\begin{aligned} B &:= \exists y\, q(y) \\ C &:= \exists z\, r(y) \end{aligned}$$

とみなして

$$A = p(x) \vee (B \wedge C)$$

*5 $\exists z\, r(y)$ という形は，述語 r が z を含まないのだから，$r(y)$ そのものでも問題はない．ここでは，ある意味説明のため，$\exists z$ が，形式的に，付加されていると考えて差し支えはない．

とあらわすことができる．ここで B の中にある $\exists y$ は $q(y)$ のみを形容している．つまり，B においては，y は束縛変項であり，自由変項はない．C の中にある $\exists z$ は $r(y)$ だけを形容している．よって，C において y は自由変項である．さて一方で，全体 A について x は束縛変項であった．したがって，この論理式全体における自由変項は $C = \exists z\, r(y)$ の y ということになるのである．いくら $B = \exists y\, q(y)$ で y が束縛されていたとしても，そのスコープは C に及ばないので，C の y は自由変項のまま存続するのである．量化子のスコープに応じて，個体変項は自由であったり束縛されたりするのである．

1.4.2 閉論理式

量化子のスコープから，個体変項について自由変項と束縛変項という区別が得られた．この区別を利用して，自由変項を含まない論理式を「閉論理式」と呼ぶ．たとえば

$$\forall x\, p(x),\ \exists y\, q(y)$$
$$\forall x\, (p(x)\ \underline{\mathrm{op}}\ q(x))$$

は閉論理式である（$\underline{\mathrm{op}}$ は論理定項の結合子のどれかを代表している）．いっぽうで

$$p(x), q(y)$$
$$\forall x\, p(x)\ \underline{\mathrm{op}}\ q(x)$$
$$\exists x\, (p(x)\ \underline{\mathrm{op}}\ q(y))$$

などは閉論理式ではない．閉論理式ではないものを開論理式と呼ぶこともある．

また，個体定項を適用した述語 $p(a)$ は，やはり自由変項を含まないので，閉論理式となる．

そう．賢明な方はお分かりだろう．閉論理式はかならず真偽が定まる．つまり，命題になっているのである．

1.4.3 自由変項の存在と量化子

自由変項のあるなしによって，ある種の量化子の変形が可能になる．たとえば，Q は自由変項 x を含まない論理式であるとすれば

$$Q \wedge (\forall x\, P) = \forall x\, (Q \wedge P)$$
$$Q \vee (\forall x\, P) = \forall x\, (Q \vee P)$$
$$Q \wedge (\exists x\, P) = \exists x\, (Q \wedge P)$$
$$Q \vee (\exists x\, P) = \exists x\, (Q \vee P)$$

である．

1.5 多項述語

複数の項をもつ述語（多項述語と呼ぼう）[*6] に論理式を拡張することはそう難しいことではない．述語のあらわしかたは，述語が持つ項の個数分記述する，つまり，n 項述語ならば

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

とするのが自然だろう．

[*6] 多項述語を考えるのか？次の章から定義とか定理とかを考えていくのだけれど，そこでは ε-δ や ε-N の論法が使われる．往々にして，それらは，個体変項が複数絡み合った述語（条件）で記述されるからである．一例として，関数 f が点 a で連続であるという述語（条件）は，

$$p(f, a, \varepsilon, \delta) := \forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\ \ (0 < |x - a| < \delta \ \longrightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

という 4 項述語になる．

焦点は，自由変更・束縛変項と閉論理式の扱いである．$p(x, y, z)$ という 3 項述語を例にして考えてみる（n 項述語については，推して知るべし，である）．そのとき，量化子の対象によって，次のような事態になる：

$$
\begin{array}{rcl}
p(x, y, z) & : & x, y, z \text{ ともに自由変項} \\
Qx\, p(x, y, z) & : & x \text{ は束縛変項，} y, z \text{ は自由変項} \\
Qx\, Qy\, p(x, y, z) & : & x, y \text{ は束縛変項，} z \text{ は自由変項} \\
Qx\, Qy\, Qz\, p(x, y, z) & : & x, y, z \text{ はすべて束縛変項．したがってこれは閉論理式}
\end{array}
$$

面倒なところはこれに尽きる．これらを，先の論理式の仲間に組み入れて，定義を見直せばよいのである．

第 2 章

定義するということ

2.1 定義の形式と，定義する時に必要なもの

♣ というものを定義するときの文章形式の骨格は

> ◯ が，△ を満たすとき，♣ という．

につきる．あとは，必要や好みに応じて飾りをつけた言い回しにすれば良いだろうが，おそらくシンプルな方が喜ばれると思う．

この骨格文章を味わえば，◯ は，考えている対象・議論している対象であることはあきらかだ．△ は条件であることもわかる．そして，◯ がこの条件 △ を満たすとき ♣ と言う，と決めるのである．なんらかの名詞，あるいは属性を示す言葉 ♣ をあたえると考えて良い．これが定義である．

条件は，述語，すなわち論理式で書ける．それなりに複雑なものとなるのであろうから，多項述語の論理式で考えておくのがよいはずだ．そしてこの論理式は，◯ の条件でもあるのだから，項として ◯ が入っていなければなるまい．したがって，$p(\bigcirc, x_1, x_2, \ldots)$ という形であることが必要になる．以上により，上の定義は

> ◯ が $p(\bigcirc, x_1, x_2, \ldots)$ を満たすとき，♣ と名付ける

と書きあらためられる．

さてこの ◯，特定の事物だけをあらわす物ではいけない（先取りすれば，個体定項ではいけない）．なぜならば，定義というものは，その定義自身の持つ条件を利用して，対象が ♣ であるかどうかの判断をくだせなければならないからである．．すなわち，「どのようなものが ◯ に代入されても，それが ♣ として定義できるかどうかがわかる」という機能を，定義は持っていなければならないのだ[*1]．

つまり，定義というものは，「◯ に持ってきたものが何であるかによって，定義できるかどうか判断できる」ように作られていなければならないものなのである．さりとて，◯ に何でも持ってきていいわけでもあるまい．ともかくも，今何かを考えていているのだから，その考えている対象の中から拝借せねばならないだろう（鍋の具に酒は選ばないよね）．つまりその対象の領域があるはずだ．これを対象領域といったり，議論領域といったりする．domain of discourse である．そして，本稿の場合，ちょいとした数学の話なのであるから，領域といえば集合，ちょっと贅沢して集合族，と言うことになるのだった．

論理式の言葉でまとめておこう．定義における対象 ◯ は個体変更でなければならない．定義における △ は，◯ の個体次第で成り立つ成り立たないにわかれるので，開論理式でなければならない（すくなくとも，◯ に対しては開でなければならない．言い換えれば，個体変項 ◯ は束縛されていてはいけない，つまり自由変項出なければいけない）．そして個体変項は，自身が所属する集合を定めねばらななかった（1.1 (p.2) 節）．これが，対象領域（議論領域）

---

*1 なんだかうまく説明できている気がしないので，脚注での具体例つき補足説明で逃げる．いま，「関数 $f(x)$ は，△ のとき，連続である」と定義されているとする．そしてこの定義のもとで，$f(x)$ に様々な関数をあてはめたときに，連続であるかどうかが判断できなければならない，ということをいいたいのである．逆から攻めてみると，「関数 $f(x) = x^2$ は，△ のとき，連続である」というのは定義ではないのだ．ただ $f(x) = x^2$ という関数の属性を述べているに過ぎないからである．．つまり定義は，その対象領域を代表する抽象的なものに対して行われる行為なのだ，といいたかったのだ（そしてここから，プログラミングにおけるクラスとオブジェクトの関係が見えてくるような気がするのだが····）．

のことである[*2].

2.2 定義の解釈の実践

関数の連続の定義

‡ Ex.1

定義 2.1. 田島本 [1, p.91]

f(x) は a およびその近くで定義されているとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な $\delta > 0$ を決めると，

$$\left|x - a\right| < \delta \quad \text{のすべての } x \text{ について} \quad \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$$

となるならば，f(x) は $x = a$ で（あるいは点 a で）連続であるという．

定義の骨格にあわせてみると，

◯（対象）	関数 f(x)
♣（名詞）	$x = a$ で（あるいは点 a で）連続である

となる．このような書きかたにおいては，対象の領域は「a の近くで定義されている 1 変数関数全体」であることが暗黙に諒解されているのである．けれども，あまり明示されることはない．読めばわかる，という流れなのであろう．ま，それは仕方のないことだから，自らで明示するよりない．ということで，この対象領域を集合 $\mathbb{U}$ とすれば

$$\mathbb{U} = \{\, f \mid f \text{ は，} a \text{ の近くで定義されている関数である} \,\}$$

という集合的な表記になる．考察の対象は，この $\mathbb{U}$ の要素全体である．つまり，$f \in \mathbb{U}$ であって，条件

△（条件）	任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な $\delta > 0$ を決めると， $\left|x - a\right| < \delta$ のすべての x について $\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$ となる

を満たすものが，$x = a$ で連続であると定義されるのである．

あとは，半分余興的．この条件を論理式で表現すれば以下の通りである：

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \left\{ \forall x \ \left(\left|x - a\right| < \delta \ \longrightarrow \ \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon \right) \right\} .$$

たしかに，f(x) は自由な個体変項になっている．よろしい．

しかしながら，ここで終わらずに，もう少し細かいことを見ていこう．いまなにげに a をつかったが，これは固定的なものだろうか．つまり，この定義は，ある固定化された点 a での連続ということをのみを述べているだけなのだろうか？まさかそんな不合理なことはあるまい．どのような a であっても[*3]，この定義で連続ということが定められるように感じられるし，そうであるべきだろう思う．おそらく心のどこかには，「一旦とりあえず a を固定化して連続を定義する．そしてまた次の機会には a' での連続を考える．そしてまた次の機会には$\cdots\cdot$」というシチュエーションが想定されているのだ．これはとりもなおさず，a も対象と見ていることに他ならないだろう．それによく見れば，論理式においても a は自由な個体変項であると見てとることも不可能ではない．この立場を推し進めることは，

◯（対象）	関数 f(x) と a の組みあわせ

[*2] 前の脚注に即して言えば，対象となっている「関数 f(x)」の領域を明示しておくべし，ということである．この対象である f(x) は実数関数が対象なのか，複素関数までも対象とするのか．1 変数関数なのか，多変数関数なのか，とかとか．そこらへんはっきりさせないと，鍋の具に酒を選ぶ，ということになってします．でもまぁ，実際問題，ここら辺はおおらかで，「そこは文脈というカードに書かれているから，そのカードを裏返して推測してね」といった感じである．

[*3] もーっと細かいことを言えば，実数 a という制限がつくだろう，この文脈では．

という立場をとることであり，対象領域の集合を

$$\mathbb{U}' = \{ (f, a) \mid f \text{ は，実数 } a \text{ の近くで定義されている関数である} \}$$

という組で見るということになるのである．毎度毎度このような細かすぎる定義を書くのはしんどいけれど，括弧と同じで，きちんと判別させたい時は労を厭わず明示的にするべきなのであろう．

‡ Ex.2

定義 2.2. 中島本 [2, p.65]

実数 a と区間 $\mathbb{I}$ は関数 $f(x)$ の定義域の中にあるとする．

1. $f(x)$ が点 a で連続であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．

2. $f(x)$ が $\mathbb{I}$ で連続であるとは，$\mathbb{I}$ のすべての点で $f(x)$ が連続であることである．
3. $f(x)$ が連続関数であるとは，$f(x)$ の定義域のすべての点で $f(x)$ が連続であることである．

この定義の記述形式は，

“◯ が ♣ である”，ということは，“（◯ について）条件 △ が成り立つことである”

という形になっている，この書き方も，わりとよく見られるものである．

さらにこの定義では，最初に点と区間と関数の定義域の関係が述べられているので見通しもいい．ただ定義 (2.1) (p.9) と同様，対象領域の明示化はなされていない．ほぼ定義 (2.1) (p.9) の場合と同様であるが，区間 $\mathbb{I}$ を付け加えないといけないだろう．

そして，この上記の 3 段階構成の定義は見事であると思う．1. で「点での連続」を定義し，2. では，区間が点から構成されることを利用して区間での連続を定義し，3. で「連続関数」というものの定義を，1. と 2. を利用して導入していうからである[*4]．

‡ Ex.3

定義 2.3. 佐藤文宏本 [3, p.21](本橋本 [4, p.96] でも引用されている）

$$\begin{aligned} &\text{関数 } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ が点 } x = a \text{ において連続} \\ &\overset{\text{def}}{\iff} \\ &\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

記号 $\overset{\text{def}}{\iff}$ を，「左右（上下）相互に同じことがらを定義している」というものとみなそう．その上で定義の文章形式の骨格に沿ってこの定義をあらためてみると

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x = a$ において，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

を満たすとき，関数 f は点 $x = a$ で連続であるという．

---

*4 連続関数というと，ついつい実数全体で連続である，などど考えてしまうが，この定義は示唆的であって，「定義域で連続でさえあればいい」ということをいっている．$y = \log x$ は $x = 0$ で連続でないと見做しがちだが，定義域として $|x| > 0$ としてあればこれは立派な連続関数なのである（といっていいのだろうな？）．

となるだろう．したがって，ここまでくれば，定義 (2.1) (p.9) とほぼ同じである．異なる点は，

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

という述語の部分である．

まず，絶対値 $|x - a|$ に対してそれは 0 より大きいとしているところである．これは極限の取り方の考え方の相違とみられる．$x \neq a$ をキープしながら，$x \to a$ とする，ということの著者佐藤の表明なのであろうと思う．同様のことは，定義 (2.2) (p.10) の著者中島も言っている（ [2, pp.53-55] を参照)．つまるところ，関数 f において $f(a)$ が定義されていなくても $x \to a$ の極限が考えられるという便利さを尊重してこのような記述になっているのだろうと思う（最近はどうもこちらが主流なようだ)．ご案内の通り，$f(a)$ が定義されていてもなんら不都合はない．定義 (2.1) (p.9) の著者田島は，堂々と，$f(a)$ が定義されているから不要なのだ，といっている．

もうひとつは，$\implies$ の記号と $\forall x$ のないところである．さてさて．数学の関数をめぐる議論においては，まず第一に，その関数の定義域をあきらかにせよという格言がある（ほんとか？)．ただ，往々にして，定義域への言及がなされないことがある．この定義の記述においても，その点は曖昧である（ただ，この著書でこれが書かれている箇所は，そのような内容を焦点とするところではないので，簡略してあるのだろうと思う，という愚考を記しておく)．そこを忖度して，この述語の $\implies$ は x の定義域においてすべて，と考えるのが自然になる．そのうえで，$\implies$ をくだいた形[*5] にすれば

$$\{0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon\} \equiv \{\forall x\ \ 0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}$$

としてよい．

当然であるが，定義 (2.1) (p.9) の条件の論理式と同じである．

少し毛色が違う定義

‡ Ex.4

定義 2.4. 佐藤文宏 (本橋本 [4, p.99] で引用されているやつ．原典に当たること）

集合 $\mathbb{G}$ に，演算 $\mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$，$(a, b) \to ab$ が定義され，以下の 3 条件を満たすとき群という．

1. 任意の $a, b, c \in \mathbb{G}$ に対し，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ．
2. 任意の $a \in \mathbb{G}$ に対し，$ea = ae = a$ を満たす $e \in \mathbb{G}$ が存在する．
3. 任意の $a \in \mathbb{G}$ に対し，$ab = ba = e$ を満たす $b \in \mathbb{G}$ が存在する．

‡ Ex.5

定義 2.5. 田島本 [1, p.102]

ある区間 $\mathbb{I}$ で定義された関数 $f(x)$ が次の性質 (U) をもつとき，$f(x)$ は $\mathbb{I}$ で一様連続であるという，

$$(\mathrm{U}) \quad \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して適当な } \delta > 0 \text{ を決めると，} \\ \mathbb{I} \text{ に属するどんな } x_1,\ x_2 \text{ であっても．} \\ \qquad |x_1 - x_2| < \delta \quad \text{ならばかならず} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \\ \text{となる．} \end{cases}$$

[*5] $\{p(x) \implies q(x)\} \equiv \{\forall x\ (p(x) \longrightarrow q(x))\}$ というやつである．$\implies$ は暗黙に $\forall$ が記述されているという致命的な話．なお両辺とも命題であるので，$\equiv$ で結んでいる．

第 3 章

定理というもの

3.1　定理の形式

定理というものは，**真であることが保証されている命題**である．この定理の文章形式は，

- 仮定形
- 同値形

という 2 種類の骨格につきると言って良い．
仮定形の文章でもっとも簡潔な形式は

　　♣ ならば ♠ が成り立つ

である．論理式で書けば

$$\clubsuit \implies \spadesuit$$

であり，述語にまで分解すれば

$$p(x, y, z, \cdots) \implies q(x, y, z, \cdots)$$

とあらわせる．
同値形の簡潔な文章形式は

　　♣ と ♠ は同値である

である．論理式は

$$\clubsuit \equiv \spadesuit \quad \text{（命題形）}$$
$$\clubsuit \iff \spadesuit \quad \text{（述語形）}$$

であり，述語にまで分解すれば

$$p(x, y, z, \cdots) \iff q(x, y, z, \cdots)$$

である．

3.2　定理の解釈の実践

最も簡潔な定理の形

‡ Ex.1

定理 3.1. 田島本 [1, p.102]

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で一様連続である，

第 4 章

flow

イプシロンデルタは，どの書き方が美しいか align 環境

$$
\begin{aligned}
\varepsilon - \delta \\
\varepsilon\text{—}\delta \\
\varepsilon - \mathrm{N} \\
\varepsilon\text{—}\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

通常の文.

ε-δ
ε-N

ふたたび

ε-δ
ε-N

参考文献

[1] 田島 一郎. 『イプシロン–デルタ』. 共立出版株式会社, 1978. (第 59 刷 (2018) を参照した).
[2] 中島 匠一. 『なっとくする微積分』. 講談社, 2001. (第 3 刷 (2004) を参照した).
[3] 佐藤 文広. 『数学ビギナーズマニュアル』. 日本評論社, 第 2 版, 2014.
[4] 本橋 信義. 『新しい論理序説』. 朝倉書店, 1997. (第 2 刷 (1999) を参照した).