数式を記述する文章での私的な記号の使い方

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2023 年 9 月 28 日

概要

数式記述での記号の使い方を整理してみた．式変形の過程の記述に自分なりの規範を導入してみたかったからである．かつては，天真爛漫に，ただの式変形においても $\iff$ や $\implies$ を多用してきた．そして命題論理や述語論理を学習したとき，ちょっと今までの書き方のままではなぁ，と思い始めた．さらに，懐の深さゆえ融通無碍的な使われ方をする等号記号 $=$ ついても，その意味するところをはっきりさせたいと思った．それが，本稿の執筆動機である．わりとここら辺，教科書や著者の個性によってバラバラである気がするし，逆に，記号の使い方が個性の表れであるような気もしている．ともかく，今現在のわたくしの規範を記してみたものである．

Contents

font の選択

□ 数の集合の表記：\mathbb

集合の表記については，フォントを $\backslash$mathbb を利用する．

$$\mathbb{A} = \{\, a, b, c \,\}\ ,\quad \mathbb{B} = \{\, 2n \mid n \text{ は正の整数} \,\}$$

数の集合の表記については，次の慣用を尊重する：

$$\text{自然数:}\mathbb{N},\quad \text{整数:}\mathbb{Z},\quad \text{有理数:}\mathbb{Q},\quad \text{実数:}\mathbb{R},\quad \text{複素数:}\mathbb{C}$$

□ ベクトル三態

```
\vec{}
\newcommand{\V}[1]{\mbox{\boldmath $#1$}}
\newcommand{\Vt}[1]{\mbox{\uwave{$#1$}}}
```

で，それぞれ以下のようになる：

$$\begin{aligned} &\vec{v} \quad \vec{B}\,, \\ &\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{B}\,, \\ &\utilde{v} \quad \utilde{B}\,. \end{aligned}$$

最後の行のものは，は高木伸先生がよく使っていた記法．筆記するときは便利だけど（上下サフィックスが付けやすい），TeX では扱いづらい．

□ 行列（\mathsf），演算子（作用素）（\mathcal）

行列は `\mathsf`
演算子（作用素）は `\mathcal`

であらわす．普通の文字なども加えて並べてみると

$$\begin{array}{llll l} H\,, & J\,, & I\,, & E & \text{（通常文字）}, \\ \mathsf{H}\,, & \mathsf{J}\,, & \mathsf{I}\,, & \mathsf{E} & \text{mathsf}, \\ \mathcal{H}\,, & \mathcal{J}\,, & \mathcal{I}\,, & \mathcal{E} & \text{mathcal}, \\ \mathrm{H}\,, & \mathrm{J}\,, & \mathrm{I}\,, & \mathrm{E} & \text{mathrm}, \\ \mathtt{H}\,, & \mathtt{J}\,, & \mathtt{I}\,, & \mathtt{E} & \text{mathtt}, \\ \mathit{H}\,, & \mathit{J}\,, & \mathit{I}\,, & \mathit{E} & \text{mathit}. \end{array}$$

記号群

□ 写像記号

$y = f(x)$ を写像的な view で書くときには $\longmapsto$ をつかう．$\longrightarrow$ との混同は避けるべき．$\longrightarrow$ は論理記号専用にしよう．

$$
\begin{aligned}
&f : x \longmapsto y \\
&f : x \longmapsto f(x) \\
&\phi : Q \longmapsto q = \phi(Q)
\end{aligned}
$$

次のものも認めたい：

$$
\begin{aligned}
&x \xmapsto{f} y \\
&x \xmapsto{f} f(x) \\
&Q \xmapsto{\phi} q \\
&Q \xmapsto{\phi} q = \phi(Q)
\end{aligned}
$$

□ 論理記号

■ 論理記号

命題や述語間の論理記号はお馴染みで，

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \longrightarrow, \quad \longleftrightarrow \ .$$

■ quantifier （量化子記号，限量子記号）

quantifier もお馴染みで，

$$\forall x, \quad \exists x$$

である（x は述語変数）．

■ 同値記号，必要十分条件記号

2 つの命題が同値であることを，$\equiv$ を使って示す：

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$$

2 つの述語の真理集合が同じである場合ときには，$\iff$ を使って示す：

$$p(x) \iff q(x)$$

これは必要十分条件とも言う．

さらに，述語 $p(x)$ が述語 $q(x)$ の十分条件であるとき，

$$p(x) \implies q(x)$$

と書く．これを $q(x)$ は $p(x)$ の必要条件である，ともいう[*1]．

さらに留意しよう．この $\implies$ を用いた記述は，かつて苦労して学んだように，命題である．すなわち

$$\{p(x) \implies q(x)\} \equiv \{\forall x\,(p(x) \longrightarrow q(x))\}$$

である．そしてここから

$$\{p(x) \iff q(x)\} = \{(p(x) \implies q(x)) \land (q(x) \implies p(x))\}$$

であることから，$p(x) \iff q(x)$ は命題であることも明らかになる．それを強調すれば，

$$\{p(x) \iff q(x)\} \equiv \{(p(x) \implies q(x)) \land (q(x) \implies p(x))\}.$$

[*1] のちにのべる「文章間の関係」（p.5）での記号を先取りすれば

$\{p(x)$ が述語 $q(x)$ の十分条件である $\} \rightleftharpoons \{q(x)$ は $p(x)$ の必要条件である $\}$

とあらわせる．

文章間の関係

二つの文章どうしの関係を簡潔に記載する記号として，$\rightleftharpoons$，$\rightarrowtail$ という，あまり馴染みがない記号を導入しよう．説明の簡潔さを求めての結果である（というより，接続語彙の不足を補完するためと言った方が正しいかもしれない．文章の上手い人にはこの記号は必要ないかもしれぬ）．

□ $\rightleftharpoons$: 言い換え、同じ意味合い

述べている内容が同じな文章どうし、または用語の類を，$\rightleftharpoons$ で結ぶ．反対に，この $\rightleftharpoons$ で結ばれたものは同じ内容，同じ意味合い，言い換え，用語であると認識しよう．

$$\begin{gathered}
2\text{の倍数である} \rightleftharpoons 2\text{で割り切れる} \rightleftharpoons \text{偶数である}\\
\text{積分が収束する} \rightleftharpoons \text{積分可能である} \rightleftharpoons \text{可積分である}\\
\text{収束しない} \rightleftharpoons \text{発散する} \rightleftharpoons \text{極限がない}
\end{gathered}$$

といった感じだ．

□ $\rightarrowtail$: 「ならば」という単語を略記

往々にして「ならば」を略記したくなることがある．『XXX ならば YYY』という形式において，XXX および YYY を区別化したい場合には，「 」かまたは “ ” でクオートしてはっきりさせることが多いが，それを「ならば」を略記し，代わりに $\rightarrowtail$ を使って，わかりやすくするのである．ぐだぐだな説明をするより，実例を見る方が早い．

> 数列に極限があるならば，その数列は有界である．

という通常の文章で，「ならば」の焦点をより一層はっきりさせるには

> 「数列に極限がある」ならば「その数列は有界である」．
> “数列に極限がある” ならば “その数列は有界である”．

のような区別化を用いれば良い．そして，このクオートを横着して

> 数列に極限がある $\rightarrowtail$ 数列は有界である．

という略記を認める，ということを言いたいのである．

$=$ をめぐって

□ 能書

数式の記述や操作の過程において頻繁に用いられる等号 $=$ の意味は，かなり曖昧なままであるとおもう．したがって，その利用のされ方も，かなり融通無碍な感がある．この状況を打破するために（それほどのことか？），等号 $=$ の意味を

> 等号 $=$ の左に書かれたものと，右に書かれたものは，同じものである（等しいものである）

という意味であるとする．結構普遍的な物言いであると思うが，どうだろうか[*2]．

この等号 $=$ の意味を成り立たせる理屈として，各種理論の帰結というものがあるのだと考えられる．帰結をささえる理論は，数学だけでなく，物理学，化学，経済学，哲学などなんでもよいだろう．同じ（等しい）であるという理屈があればいいのだ．そして，それらの理論の帰結は，往々にして「法則」と呼ばれる．若干細かすぎる例であるが，

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a-b)=a^2-b^2 && \text{（四則演算法則により）}\\
&(a+b)x=ax+bx && \text{（分配法則により）}\\
&(x^2)'=2x && \text{（解析学（微分）により）}\\
&m\vec{a}=\vec{F} && \text{（ニュートン力学により）}\\
&\text{ニーチェ哲学} = \text{ゾロアスター教} && \text{（本当か？適当なこと言っていないか？）}
\end{aligned}$$

という感じである．我々を混乱に招くのは，往々にしてその理屈を述べずに $=$ で結びつけることが多いからなのだ．とりわけ基本的な数学の理屈において顕著である．いちいち「分配法則により」と書くことは少ない．「四則演算法則により」も然りである．ただそれも程度問題であって，物事が難しくなってくれば，数学の理屈であっても，$=$ の裏付けとなるものが示されるようになってくる．たとえば，高校 2 年生くらいならば

$$\begin{aligned}
&\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) && \text{（積の微分法則により）}\\
&\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx && \text{（部分積分の法則により）}\\
&\int \alpha e^{\alpha x}\,dx=e^{\alpha x}+C && \text{（指数関数の微分の法則により）}
\end{aligned}$$

と理屈を書くだろう．これは，常識とか教養と似たようなものなのかもしれない．常識と教養が豊かであれば，理屈の説明はいらない．学習においてもしかりであって，そうなることが学習の目的であると言ってよいかもしれない．わかりやすい教科書には，理屈の説明が，適切なところに親切に書かれているのだ．

数学的演算を施した結果での式変形も，その道中では各種法則などの理屈によって裏付けがなされているので，$=$ で結ばれていく．たとえば（上でも利用しているが）『$'$』を x を変数として導関数をもとめる演算であるとすれば

$$\left\{\exp(\alpha x^2)\right\}'=\exp(\alpha x^2)(\alpha x^2)'=2\alpha x\exp(\alpha x^2)$$

となって，その途中の計算過程において理屈にもとづいた数学的演算を施し．その結果を $=$ で結んでいる．この場

[*2] この立場を貫き通せば，2 つの文章が同じ意味合いであることを示すときにも $=$ を使えばいいことになる．それゆえ，「文章間の関係」(p.5) で取り入れた $\rightleftharpoons$ も不要になるのだが，どうもわたくしは文章を $=$ で結ぶということに抵抗があるのである．なんでだろう？

合の理屈は，合成関数の微分法則と指数関数の微分法則，そして冪乗関数の微分という理屈だ[*3].

繰り返すが，$=$ で結ぶたびごとにまいどまいど理屈が説明されるわけではない．なので，初学段階では，その展開の意味が取れなず，式の変形のフォローに苦労するのである．ときにはフォローできないこともある．変形時の理屈が見通せることが，おそらく実力がついたということなのだろうけど，それにしても，「簡単な計算により」といわれてもなぁ．ランダウとリフシッツ，聞いてる？

もうひとつの例は，本当に文字通りの文字の置き換えの場合である．これも，置き換えたものと置き換える前のものは等しいので $=$ 記号で結ばれる．ただし，それを支える理屈はない．しいて言えば，「定義」である．これは，数学概念の定義のときや，記述の簡略化のために使われることがおおい．論理法則のところで見た糖衣構文

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} = \neg\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$$

は理屈抜きの置き換えの例であるし，重力ポテンシャルエネルギー

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

は記述の簡略化の例である．もっとも定義らしいものとしては

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

という導関数の定義があげられよう．

記号 $=$ の意味合いは，上で述べたように，その根拠が法則に裏打ちされたものであったり，単なる置き換えの簡便方であったりするとは言え，とにかく両辺は等しいということを主張するものである．それゆえ，$=$ で結ばれるおのおのは，その時々の都合にあわせて，自在に置き換えて良いことになる．等しいものであるという主張を認めているのだから，それは当然だろう．つまり，$=$ は，両辺が等しいという主張に加えて，各置き換えも可能である，という主張も含まれているものなのである．

□ $:=$ 記号，$=:$ 記号

$:=$ や $=:$ は，上記の置き換えを明示的にあらわす際に利用される記号である．たとえば，集合 $\mathbb{S}$ を $\{\, n^2 \mid n \text{ は自然数} \,\}$ の様に定義したいときに，「ここで定義するぞ」という意思を強調して

$$\mathbb{S} := \{\, n^2 \mid n \text{ は自然数} \,\}$$

の様に記すのである．

「いまここで，f を展開してみよう．するとかくかくしかじかである．このときの A を α ，B を β とおくと $\cdots$」というような場合も

$$\alpha := A, \quad \text{または} \quad A =: \alpha$$
$$\beta := B, \quad \text{または} \quad B =: \beta$$

のように記し，置き換えという行為を強調する．

[*3] 数学的な法則は，式変形のさいに無条件に利用される．これは本来ならば，議論領域をはっきりさせて，命題・述語・論理法則などをしっかりと使い，「変形前と変形後で等しい」ということが真であることを確認してから，使うべきものであるはずだ．ただ毎度毎度そこまで「原点に立ち返って」からことを始めていたのでは，手間がかかりすぎる．数学の各分野において，そのような仕事がなされたのちに万人に提供され，無条件の利用が認められるものが，数学の法則なのであろうと愚考している．拠って立つ基盤は，公理という質的に巨大な仮定なのだろうと思う．そして，論を進める際の議論領域については，暗黙の了解であることが多いけれど，そこはそれ，勉強を重ねれば文脈によってわかるようになるというしろものなのだろう．

それに反して，物理法則が式変形に適用できるのはなぜなのか．公理だけからは出てきまい．概念の表現は数学の力を借りるとしても，正しさを支えるものは，実験事実（または観測事実）に他ならないのだろう．その結果として認められたものが，法則となり，式変形の際に無条件に利用できるようになる．誰がどこから $m\vec{a} = \vec{F}$ を持ってきたのか．ニュートンだってそれは実験して確かめるしかなかったに違いない．なので，数学と比べて，物理や化学は，実験に基礎をおいた「経験科学」と言われるのであろうと，これまた愚考している．ま，お互い仲良しだけどね．

それなりに長い計算結果を直截に置き換えたい場合にも，$=:$ が使われる．なんらかの計算した結果，その次のことを考えて，e^{i2t} にかかる係数を C，e^{-i2t} にかかる係数を D としたいときなどに

$$
\begin{aligned}
2e^{i(2t+\pi/6)} &= 2e^{i2t}e^{i\pi/6} =: Ce^{i2t} \\
2e^{-i(2t+\pi/6)} &= 2e^{-i2t}e^{-i\pi/6} =: De^{-i2t}
\end{aligned}
$$

といったような具合で，記される．

しかしながら先に述べたように，往々にして，$:=$ や $=:$ という明示的な置き換え意思表示の記号の代わりに，$=$ での置き換えを記していることも事実である．いや，$=$ が使われていることの方が多いかもしれない．「$A = \alpha$ として」とか「$B = \beta$ とおくと」というように，日常言語で断りが入っている場合は少し親切であるけれど，断りなしに問答無用という場合もある．「文脈からして自明」なのであるだろうけど，数学と言ったってこのようにルーズで融通無碍なのである．ルールを厳密に適用しなければならない，というものでもないのだ．僕らは数学を誤解している．

式変形の流れ

□ 方向

式について各種法則を適用し式を変形していく過程の流れは，右，そして下の順序で進んでいくことを基本とする．以下の例は，その流れを示したものであり，括弧内の数字が変形の順番をあらわしている：

$$\begin{aligned} E(0) &= F(1) = G(2) = H(3) \\ &= I(4) = J(5)\ . \end{aligned}$$

□ 変形過程の記述

式変形の過程において $\Longleftrightarrow$ を使うのは極力避ける． $\Longrightarrow$ も同様とする．これらは論理記号専用のものとしていきたい．

単純な式変形ならば $=$ で繋いでいく．

微妙なものが，「 $\therefore$ 」 と 「 i.e. 」[*4] の違いである．ニュアンスとしては

「したがって（ゆえに）」のときには「 $\therefore$ 」
「（すこし）変形して言い換えれば」のときには「 i.e. 」

だろうか．「 i.e. 」のニュアンスを「すなわち」と同じと言う人もいるが，それとて「したがって」「ゆえに」との差は微妙に感じられる．「すなわち」に、その前で述べていることをよりもっと明確に言い換える（この明確性をますというところが重要），という意味をこめて「 i.e. 」としたいのであるけれども，

$$\begin{aligned} &m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2 + U(\vec{r})\right) = 0 \\ &c\frac{dy}{dz} = \pm\sqrt{\mu(y^2) - c^2} \quad \text{i.e.} \int\frac{c\,dy}{\sqrt{\mu(y^2) - c^2}} = \pm\int dz \end{aligned}$$

と来た日にはなぁ（これは山本義隆著『幾何光学の正準理論』からの抜粋である）．ニュアンスの違いと言ってもなあぁ．ともかく，matter of taste あるいは執筆時のノリ次第なのかもしれないが，いろいろ留意して使って行ってみたいと思う．

[*4] i.e. はラテン語の “id est” を略したものであるらしい．